L. B. Monastir	**Série n : 44**	4 ^{ème} Math
P.P. : Ali Zouhaïer		

Chapitres : Similitudes + Intégrale + Log + …

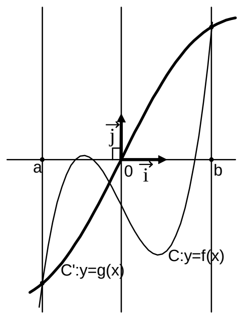
Exercice 1   Vrai - Faux

1/ Si $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \pi$ *alors* $\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{1}{x^2+1} dx \geqslant 0$ ☐

2/ Si $f(x) \leqslant 1,\ \forall x \in [1;\ 3]$ alors $\int_1^3 f(x)dx \leqslant 1$ ☐

3/ La fonction $F : x \mapsto \int_{x^2}^{\sin x} \frac{x}{x^4+2009} dx$ est définie sur IR ☐

4/ Dans la figure ci-dessous on a la courbe de deux fonctions f et g représentées dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i}, \vec{j})$ on a aussi les représentations deux droites d'équations respectives x=a et x=b. On a $\int_a^b (f(x)-g(x))dx \leqslant 0$ ☐



Exercice 2   QCM

Choisir la bonne réponse

1/ L'homothétie $h_{(I;\,-5)}$ est une similitude

a) directe d'angle π **b**) directe d'angle 0 **b**) indirecte de centre I.

2/ L'image par une similitude de rapport 4 d'un rectangle d'aire A est un rectangle d'aire :   **a**) A   **b**) 4A   **b**) 16A

3/ ABC un triangle, S est la similitude directe de centre A et qui transforme B en C. On a $S \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ S^{-1} =$

a) $t_{\overrightarrow{AB}}$ **b**) $t_{\overrightarrow{AC}}$ **c**) $t_{\overrightarrow{BC}}$

Exercice 3

Soit f:$[1, +\infty[\to IR; x \mapsto f(x) = x\sqrt{x-1}$

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 1, interpréter géométriquement le résultat trouvé.

2/a- Montrer que $\forall x \succ 1;\ f'(x) = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$.

b- Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm). On placera aussi le point d'abscisse 2 de C_f.

3/ Prouver que f réalise une bijection et tracer sa courbe $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1} la fonction réciproque de f dans le même repère)

4/ Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équation respectives $y = 2,$ x$= 0$ et x=2.

a- Vérifier que $\forall x \geqslant 1;\ f(x) = (x-1)\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}$.

b- Calculer A.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur IR^+ par : $f(x) = \frac{x\sin x}{1+x^2}$;$\forall\ x \in [0;\ 1]$

Pour tout n de IN on pose $g_n(x) = x^n \sin x$ pour tout $x \geqslant 0$

Soit $I = \int_0^1 f(x)dx$ et $u_n = \int_0^1 x^n \sin x\, dx$ pour tout n de IN.

1/ Montrer que pour tout n de IN on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$; $\forall x \in \left[0;\ 1\right]$.

2/ Soit $n \in IN$ et t un réel quelconque .

a- Montrer que pour tout réel t , on a :

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}.$$

b- Montrer alors que pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$f(t) = g_1(t) - g_3(t) + g_5(t) + \ldots + (-1)^n g_{2n+1}(t) + \frac{(-1)^{n+1}}{1+t^2} g_{2n+3}(t)$$

c- En déduire que $I = u_1 - u_3 + u_5 + \ldots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \dfrac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$

3) On pose $S_n = u_1 - u_3 + u_5 + \ldots + (-1)^n u_{2n+1}$ pour $n \in IN$.

a- Montrer que $\forall n \in IN$ on a $|I - S_n| \leq u_{2n+3}$.

b- En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = I$.

Exercice 5

Dans le plan otienté, on considère le carré ABCD de centre O tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$.

1/ On note S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Trouver une construction géométrique du centre Ω de S.

2/**a**- Préciser S($[BD]$) et S($[BC]$).

b- Déterminer alors les images de B et de A par S.

c- Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(B,1)$ et $(J;4)$.

3/ Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $h = R \circ S$ et on note Ω' le milieu de $[\Omega B]$.

a- Préciser $h(B)$ puis caractériser h.

b- Justifier que le triangle $O\Omega\Omega'$ est rectangle et isocèle.

4/ Soit maintenant σ la similitude indirecte qui envoie D en O et C en I. $S_{(OI)}$ est la symétrie orthogonbale d'axe (OI).

a- Vérifier que $\sigma = S_{(OI)} \circ S$ puis déterminer $\sigma(B)$.

b- Donner alors la forme reduite de la similitude indirecte σ.

Exercice 6

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $\sqrt{2}$ i , -2 + 2i et 2i .

1. On considère l'application

$$S : \begin{array}{l} P \longrightarrow P \\ M(z) \longrightarrow M_1(z_1) \quad \text{tel que } z_1 = \left(\dfrac{-1+i}{2}\right)z + 1 + i \end{array}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

2. Soit f la similitude directe qui transforme A en B et O en C .
   a. Montrer que pour tout point M (z), d'image M'(z') par f, on a $z' = \sqrt{2}\, iz + 2i$.
   b. En déduire les éléments caractéristiques de f.
   c. Montrer que $f \circ f$ est une homothétie que l'on caractérisera.

3.a. Déterminer l'affixe du point S(C).
   b. Montrer que $S \circ f$ est une rotation que l'on caractérisera.

....

Exercice 7 *D'après un devoir*

1/ Soit f la fonction définie sur [0, $\frac{\pi}{2}$[par $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$.

a) Montrer que f est dérivable sur [0, $\frac{\pi}{2}$[et calculer $f'(x)$.

b) Calculer alors l'intégrale A=$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}dx$.

2/ Pour n $\in IN^*$ on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x}dx$.

a) Calculer I_1.

b) Montrer que pour tout n de IN*; $I_n - I_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

c) Montrer que pour tout n de IN*; $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$.

3/ On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in IN^*,\ A - I_n = S_n$.

b) En déduire que (S_n) est convdergente et donner sa limite.

Exercice 7 ....

On considère la fonction *f* définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^3 Logx & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

C$_f$ désigne la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ l'unité graphique : 2 cm .

Soit g la fonction définie sur]0,+∞[par $g(x) = x - 1 + \frac{3}{2}Logx$.

1/**a**- Dresser le tableau de variation de g.

b- Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$.

2/**a**- Prouver que f est dérivable a droite en 0.

b- Donner une équation cartésienne de T la tangente à C$_f$ en $O(0,0)$.

c- Etudier la position relative de C$_f$ et T.

3/**a**- Montrer que $\forall x > 0, f'(x) = x^2 g\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

b- Montrer que : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

4/**a**- Dresser le tableau de variation de f.

b- Tracer C$_f$ et T dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

5/**a**- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution α dans $]0,+\infty[$

b- Vérifier que $1 < \alpha < 2$.

6/ Soit $\mathcal{A}(\alpha)$, l'aire en cm^2, de la partie du plan limité par C$_f$, l'axe des abscisses et la droite d'équation x=1.

Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α et sans utiliser Logα.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. C_f est courbe la réprésentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/**a**- Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est asymptote à C_f.

b- Etudier la position relative C_f par rapport à Δ.

3/ Tracer Δ et C_f.

4/ Soit **A** l'aire, en cm^2, de la partie du plan comprise entre la courbe C_f, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$. Calculer **A** .

5/ Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = f(n) - 2n + 1$.

a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $u_n < 0$.

b- Etudier la monotonie de la suite (u_n).

c- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

6/ On considère les suites (S_n) et (T_n) définies sur IN^* par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{2n}$$

a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $S_n = -\ln(n+1)$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

b- En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $T_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)$.

Exercice 9

Soit la fonction $f : [1;+\infty[\to IR; x \mapsto x - xLogx$.

1/ Etudier *f* et tracer C_f (courbe de *f* dans un RON $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$)

2/ Montrer que *f* est une application bijective puis tracer $C_{f^{-1}}$ la courbe de sa bijection réciproque.

3/ Soient les points $A(1;1)$ et $B(e;0)$ de C_f et $B'(0;e)$ de $C_{f^{-1}}$. Désignons par D le domaine du plan limité par les axes des coordonnées, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de C_f et l'arc $\overset{\frown}{AB'}$ de $C_{f^{-1}}$

a- Caculer l'aire de D.

b- Calculer donc la valeur de $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$.

Exercice 10

Soit la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par : f$(0) = 1$ et $\forall x > 0; f(x) = \dfrac{Log(x+1)}{x}$

On note C la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/**a**- Montrer que $\forall x \geq 0; 1 - x \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1$.

b- En déduire que $\forall x \in [0;+\infty[$ *on* a $x - \dfrac{1}{2}x^2 \leq Log(x+1) \leq x$

2/ Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = Log(x+1) - \dfrac{2x}{2+x}$

a- Montrer que g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer g'(x).

b- Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[$; $0 \leq g'(x) \leq \dfrac{1}{4}x^2$.

c- En déduire que $\forall x \in [0;+\infty[$; $0 \leq g(x) \leq \dfrac{1}{12}x^3$

3/**a**- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b- Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{Log(x+1) - x}{x^2}\right] = \dfrac{-1}{2}$.

c- Etudier la dérivabilité de *f* à droite en 0. Donner une équation cartésienne de la demi tangente T à C au point d'abscisse 0. Préciser la position relative de C par rapport à T.

4/**a**- Vérifier que $\forall x > 0$ on a $g(x) < Log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

b- Dresser le tableau de variation de *f* et construire C.