L. B. Monastir	**Série n : 44**	$4^{ème}$ **Math**
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Intégrale + Log + ...		

Exercice 1 bac 2011 (s. controle)

Soit f la fonction définie sur]0, $+\infty$[par f$(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt$

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

1) Pour tout x > 0 , f '(x) $\geqslant$ 0.

2) Pour tout x > 0 , f(x) $\geqslant$ 0.

3) f(2) $\leq$ ln(2).

Exercice 2 (5 points) Bac 2010 s. principale

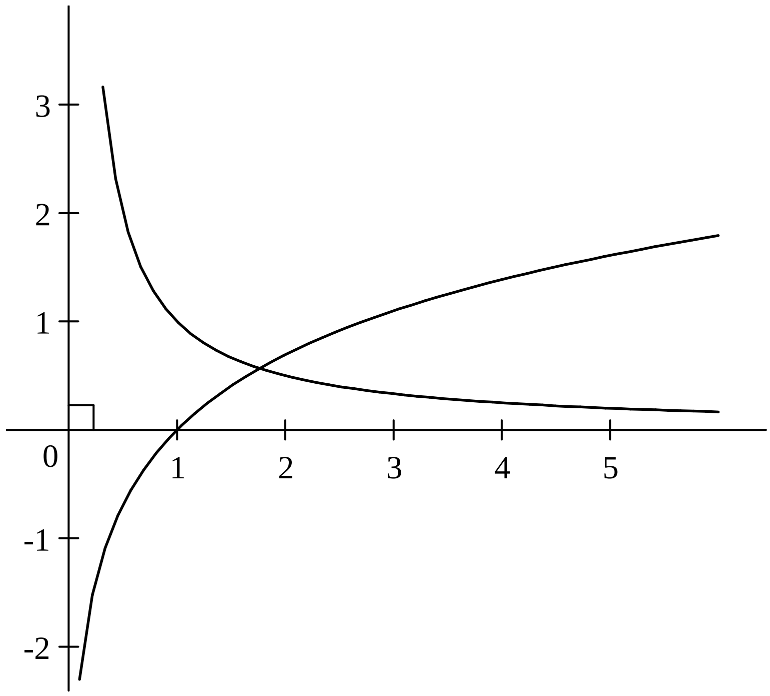
1/ Soit la fonction f définie sur]0;$+\infty$[par f$(x) = \ln(x) - x\ln(x) + x$.

a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b- Montrer que pour tout x >0; f'(x)=$\frac{1}{x} - \ln(x)$.

2/ Dans la figure ci-dessous **C**$_g$ et C$_h$ sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ des fonctions g et h définies sur]0;$+\infty$[par g$(x) = \frac{1}{x}$ et h$(x) = \ln(x)$.

C$_g$ et C$_h$ se coupent en un point d'abscisse β.



a- Par une lecture graphique donner le signe de f'(x).

b- En déduire le sens de variation de f .

c- Montrer que f$(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

3/ On désigne par C$_f$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a- Etudier la position relative des courbes C$_f$ et C$_h$.

b- Montrer que la courbe C$_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que 0,4 < x_1 < 0,5 et 3,8 <x_2 < $3,9$.

c- Placer dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les points A$(\beta,0)$ et B$\left(0,\frac{1}{\beta}\right)$ et en déduire une coçnstruction du point de coordonnées $(\beta; f(\beta))$.

d- Tracer C_f.

4/ Pour tout réel t de $]0;+\infty[\backslash\{\beta\}$ on désigne par $\mathcal{A}(t)$ l'aire de la partie du plan S(t) limitée par les courbes C_g et C_h et la droite d'équation x=t.

a- Montrer que pour tout t de $]0;+\infty[\backslash\{\beta\}$; $\mathcal{A}(t) = f(\beta) - f(t)$

b- Soit $t_0 > \beta$. Hachurer S(t_0).

c- Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0;\beta[$ tel que $\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_0)$. Hachurer S$(t_1)$.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0,+∞[par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

A/

1/a) Etudier les variations de f .

b) Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

2/ Tracer la courbe C_f de f et sa tangente au point d'abscisse 1.

3/a) Montrer que f réalise une bijection de IR_+^* sur un intervalle J à préciser.

b) Montrer que l'équation f (x) = x admet une solution unique a dans l'intervalle]0;+∞[et que 0.5 <a <1 puis donner un encadrement de a d'amplitude 0.25 .

B/

1/a) Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$.

b) Vérifier que : $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{n} - f(n)$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul , $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

2/ On considère la suite (S_n) définie sur IN* par: $S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} f(k)$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $0 \leq f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n-1) + f(2n)$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de (-1) et de 0 , on a: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

c) En déduire l'égalité: $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$.

d) En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers +∞ de la somme suivante : $f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n-1) + f(2n)$

Exercice 4

I] Soit la fonction $g : IR_+^* \to IR; x \mapsto x^2 - 3x + 1 + Logx$

1/ Etudier les variations de g.

2/**a**- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b- Vérifier que $2,1 < \alpha < 2,2$.

3/ En déduire le signe de $g(x)$.

II] Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xLogx}$. C_f désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1/ Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \frac{-g(x)}{(x^2 - xLogx)^2}$.

2/ Vérifier que $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - Logx}$.

3/ Prouver que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$ déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4/ Dresser le tableau de variation de f.

5/ Tracer C_f (en prendra $\alpha = 2,2$)

6/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 5

1/**a**- Montrer que pour tout $t \geq 0; \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

b- En intégrant prouver que $\forall x \in IR^{+}; \ln(1+x) \leq x$.

$*$ on admet que $\ln(1+x) = x$ si et seulement si $x = 0$

2/ Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On pose $I = \int_0^1 f(x)dx$.

a- Prouver que le réel I existe.

b- Donner une interprétation géométrique de I.

3/ Soit la suite (I_n) définie sur IN^* par : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$.

a- Vérifier que $\forall n \in IN^*; I_{n+1} = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx + I_n$.

b- Déduire que la suite (I_n) est croissante sur IN^*.

4/**a**- Vérifier que $\forall n \in IN^*; I_n = I - \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$

b- Déduire que la suite (I_n) est majorée.

5/**a**- A l'aide de **1**/, montrer que $\forall n \in IN^*; 0 \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx \leq \dfrac{1}{n}$.

b- Déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = I$.

<u>Exercice 6</u>

I)Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & si\ x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

C_f est la courbe représentative de f dans un repère R.

1/ Etudier la dérivabilité de f en 0, interpréter géométriquement le résultat.

2/**a**- Montrer à l'aide des inégalités d'accroissements finis que :

$$\forall x > 0;\ \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}.$$

b- Prouver que f est strictement croissante sur IR_+^*.

3/**a**- Montrer que $\forall t > 0;\ \ t - \dfrac{1}{2}t^2 < \ln(1+t) < t - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{3}t^3$.

b- Prouver donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = -\dfrac{1}{2}$.

4/ Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f.

II) Pour $n \in IN^*\backslash\{1\}$ on pose la fonction $f_n : x \mapsto x^n Log\left(1+\frac{1}{x}\right),\ \forall x \in IR_+^*$.

1/ Montrer que f_n est strictement croissante sur IR_+^* (on pourra profiter de **I**)**2**/**a**-)

2/ Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une seule solution u_n dans IR_+^*.

3/ Vérifier que $u_n > 1$.

4/**a**- Montrer que $\forall x \geqslant 0;\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

b- Déduire que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$.

c- Montrer que $Log\left(1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) \geqslant Log\left(\dfrac{5}{3}\right)$.

d- Montrer enfin que $u_n < 1 + \dfrac{1}{n}$.

e- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n$.