L. B. Monastir	Série N : 47	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaier		Séance n : 8

Chapitres : Intégrale + ...

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$

1/ Montrer que $I=\int_0^1 f(t)dt$ existe.

2/ Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[;\ \int_0^x \cos t\ dt \leqslant x$.

3/ Soit la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$ définie par : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt$.

a- Montrer que $\forall n \in IN^*;\ I_n \leqslant I$

b- A l'aide de **2**/ prouver que $\forall n \in IN^*;\ \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}$

c- Montrer enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = I$.

Exercice 2

Soit la fonction F : x $\mapsto F(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+1-\cos(t)}\,dt$.

1/ Montrer que F est définie sur IR.

2/ Montrer que $\forall x \geqslant 0;\ F(x) \geqslant \dfrac{x^2}{2}$.

3/**a**- Calculer G'(x), $\forall x \in IR$ avec G$(x) = F(x)+F(-x)$

b- Prouver que F est une fonction impaire.

4/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

5/ Dresser le tableau de variation de F.

Exercice 3

Soit f :]0,1] → IR, x $\mapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

1/ Prouver que f n'est pas dérivable à gauche en 1.

2/ Dresser le tableau de variation de f puis tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthonrmé R.

3/**a**- Montrer que f réalise une bijection de]0,1] sur IR^+.

b- Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur IR^+.

c- Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère R.

c- Montrer que $\forall x \in IR^+;\ f^{-1}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4/ Soit la fonction F: x $\mapsto \int_0^{\tan(x)} \dfrac{1}{1+t^2}dt;\ \forall x \in [0;\frac{\pi}{2}[$

a- Calculer $F'(x);\ \forall x \in [0;\frac{\pi}{2}[$.

b- Déduire F(x) ; $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}[$.

c- Calculer l'aire de la partie du plan limitée par : $C_{f^{-1}}$, l'axe des abscissses et les droites d'équation respectives x=0 et x=1.

Exercice 4

d'après un livre parascolaire. (nc)

1/ Soit $u(x) = 2\sin x - 1$ définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Etudier le sens de variation de u sur I et montrer que $u(I) =]-3,\ 1[$.

2/ Soit $F(x) = \int_0^{u(x)} \dfrac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$ où $x \in I$.

a- Justifier l'existance de F sur I.

b- Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour $x \in I$ puis calculer $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

c- En déduire que $\forall x \in I,\ F(x) = x - \frac{\pi}{6}$.

3/ Soit $K = \int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$.

a- Vérifier que $K = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0)$.

b- En déduire la valeur de K.

Exercice 5

Soient I $= \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$; J $= \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x^4}}dx$ et K$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$

1/**a**- Montrer que I=J+K.

b- A l'aide d'un intégration par parties exprimer I en fonction de J.

c- Exprimer enfin I et J en fonction de K.

2/**a**- Préciser le sens de variation de f : x $\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$; $\forall x \in [0,\ 1]$.

b- Montrer que $\forall k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$; $\frac{1}{5}$f($\frac{k+1}{5}$) $\leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)dx \leqslant$ $\frac{1}{5}$f($\frac{k}{5}$)

c- Déduire que :

$\frac{1}{5}(f(0)+f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})) \leqslant K \leqslant \frac{1}{5}\left(f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5}) + f(1)\right)$

(A l'aie d'une calculatrice scientifique on trouve $0{,}895 \leqslant K \leqslant 0{,}953$)

3/ Trouver des valeurs approchées de I et J à 10^{-1} près de I et J.

Exercice 6

Soit la suite $(I_n)_{n\in IN}$ définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1}\sin t$ dt.

1/**a**- A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t$ dt en fonction de I_{n+2}

b- Calculer alors I_1.

2/ Montrer que $\forall n \in IN^*;\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}$.

3/**a**- Montrer à l'aide de deux intégrations par parties que

$$I_{n+2} + (n+2)(n+3)I_n = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}.$$

b- En déduire la valeur de I_3.

Exercice 7

Soit la suite $(I_n)_{n\in IN}$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x\, dx$.

1/**a**- Montrer que (I_n) est décroisssante sur IN.

b- Montrer que (I_n) est convergente.

2/**a**- Montrer que $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1},\ \forall n \in IN$

b- Déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

3/**a**- Calculer I_0.

b- Déduire que $\frac{\pi}{4} + (-1)^{n-1}I_{2n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1};\ \forall n \geq 2$

(On pourra procéder par itération)

c- Prouver enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots. + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right] = \frac{\pi}{4}$

4/**a**- Exprimer I_{2n+1} en fonction de n et I_1.

b- Montrer donc que $I_1 = 2 \lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right]$.

Exercice 8

Soit f:[1, $+\infty[\to IR; x \mapsto f(x) = x\sqrt{x-1}$

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 1, interpréter géométriquement le résultat trouvé.

2/a- Montrer que $\forall x \succ 1;\ f'(x) = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$.

b- Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique 2 cm). On placera aussi le point d'abscisse 2 de C_f.

3/ Prouver que f réalise une bijection et tracer sa courbe $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1} la fonction réciproque de f dans le même repère)

4/ Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équation respectives $y = 2$, x= 0 et x=2.

a- Vérifier que $\forall x \geqslant 1;\ f(x) = (x-1)\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}$.

b- Calculer A.

Exercice 9 de mon livre de 4 Math - Tome 1

Soit x un réel de $[0,\alpha]$ avec $\alpha \in [0,1[$.

On pose $\forall n \in IN; v_n(x) = \int_0^x t^{2n} dt$, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k(x)$.

1/ $\forall n \in IN,$ calculer en fonction de $x,\ v_n(x)$ puis exprimer $S_n(x)$ comme somme des fonctions.

2/**a**- Montrer que l'on peut écrire $\forall n \in IN$;

$S_n(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - R_n(x)$ où $R_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$

b- Etablir que $0 \le R_n(x) \le \frac{1}{1-\alpha^2} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

c- En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt.$

3/**a**- Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$ pour tout $t \in [0,1[$.

b- Montrer alors $\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2}\left(F(1+x) - F(1-x)\right)$ avec F est la primitive *de* $\left(\text{u: } t \mapsto \frac{1}{t}\right)$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

4/ *Soit* la suite $u_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}}{2n-1}$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}\left(F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

Exercice 10

Soit la suite $(I_n)_{n\in IN}$ définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^{n+1} \sin(2t)$ dt.

1/ A l'aide d'un intégration par parties calculer I_0.

2/**a**- A l'aide d'un intégration par parties calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(2t)$ dt

b- Calculer I_1.

3/**a**- Montrer que $\forall n \in IN^*;\ I_n \leqslant \frac{1}{n+2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2}$.

b- Etudier donc la convergence de la suite (I_n).

4/ Montrer à l'aide de deux intégrations par parties que

$$I_{n+2} + (n+2)(n+3)I_n = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}.$$

5/ Soit la fonction f : x $\mapsto f(x) = x^3\sin(2x)$ et désignons par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal R d'unité graphique 2 cm.

a- Etudier la parité de f.

b- Déduire de ce qui précède l'aire A, en cm^2, de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x$=\frac{-\pi}{4}$ et x$=\frac{\pi}{4}$.