L. B. Monastir	**Série n : 48**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Fonction Log. + Parabole + ...		

Exercice 1 Vrai - Faux

1/ Le plan est muni d'un repère orthonormé. $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. La courbe (Γ) : $y = \sqrt{x}$ est incluse dans une parabole ☐

2/ Si deux paraboles n'ont pas de point d'intersection alors alors leurs directrices sont parallèles. ☐

3/ *Tout* point d'une parabole P, de foyer F et de directrice Δ, est le centre d'un cercle passant par F et tangent à Δ ☐

Exercice 2

R=$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan.

1/ Tracer la parabole (P) de foyer F$\left(\frac{1}{2};2\right)$ et de directrice D:x=3.

2/ Donner une équation cartésienne de (P) .

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé R=$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. On considère l'application S de P dans P qui a tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -x+y+1 \end{cases}$

1/ Donner l'écriture complexe de S déduire la nature de S et ses éléments caractéristiques.

2/ Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $x^2+y^2+2xy+4x-4y-4=0$.

a- Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$'=S($\mathcal{P}$)

b- En déduire que $\mathcal{P}'$ est une parabole dont on précisera le foyer F' et la directrice D'.

3/ On pose $F = S^{-1}(F')$ et $D = S^{-1}(D')$. Montrer alors que $\mathcal{P}$ est une parabole de foyer F et de directrice D.

4/ Soient le point $A(1,1)$ et $A' = S(A)$

a- Vérifier que $A \in \mathcal{P}$ et que $A' \in \mathcal{P}'$.

b- Donner une équation cartésienne de la tangente de T' la tangente à $\mathcal{P}$' en A'.

c- Donner une équation cartésienne de T la tangente à $\mathcal{P}$ en A.

Exercice 4

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $R = \left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I] Soit (P) : $y^2 = 2px$ avec p$\in IR_+^*$

1/ Déterminer le foyer F et la directrice D de (P).

2/ Soient $H\left(-\frac{p}{2},y_0\right)$ un point de D et T=méd$[FH]$.

a- Donner une équation cartésienne de T.

b- Déterminer, en fonction y_0, l'abscisse x_0 du point d'intersection de N T et Δ_H la droite perpendiculaire à D en H.

c- Vérifier que T est la tangente à (P) en N.

II]

Soit l'ensemble $\mathcal{P} : y^2 - 2y - 2x + 1 = 0$ dans le repère R

1/ Montrer que $\mathcal{P}$ est une parabole dont on déterminera le foyer F et la directrice Δ.

2/ Vérifier que $A(2,3)_R \in \mathcal{P}$ et déterminer, dans le repère R, une équation cartésienne de T la tangente à $\mathcal{P}$ en A.

3/ Soit $\mathcal{P}'$ une parabole de foyer F et passant par A et dont la directrice D' non parallèle à Δ.

a- Montrer que D' est tangente à un cercle que l'on précisera.

b- Désignons par I le point d'intersection de Δ et D'.

Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ ' ont une tangente commune que l'on déterminera.

Exercice n°4: (3 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB =2.

Soit (C) le cercle de diamètre [AB] ; O le milieu de [AB] et F le point de (C) tel que $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OF}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

($\mathscr{P}$) étant la parabole de foyer F et de directrice (AB).

$\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI}\right)$: repère orthonormé du plan.

1) Déterminer les coordonnées du point F dans $\mathscr{R}$.

2) Montrer qu'une équation de ($\mathscr{P}$) dans $\mathscr{R}$ est $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

3) ($\mathscr{P}$) coupe (BC) en A'.

a) Déterminer les coordonnées de A'.

b) Montrer que (A'F) est la tangente à (C) en F.

4) (A'F) coupe (AD) en B'.

Montrer que B' est un point de ($\mathscr{P}$).

Construire ($\mathscr{P}$).

EXERCICE 6 *Bac Tn 2008 s controle*

1/ Soit *f* la fonction définie sur $[-2,\ 2]$ par $\begin{cases} f(x)=(x+2)\ln(x+2) & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = 0. \end{cases}$

et $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Montrer que f est continue à droite en (-2).

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2).

c) Donner le tableau de variation de f.

2/ Soit g la fonction définie sur $[-2,\ 2]$ par $g(x) = f(x) - x\sqrt{4 - x^2}$.

et $\left(\mathcal{C}'\right)$ sa courbe représentative dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Déterminer la position relative des courbes $(\mathcal{C})$ et $\left(\mathcal{C}'\right)$.

b) Dan la figure ci-jointe, on a tracé $\left(\mathcal{C}'\right)$ de g.

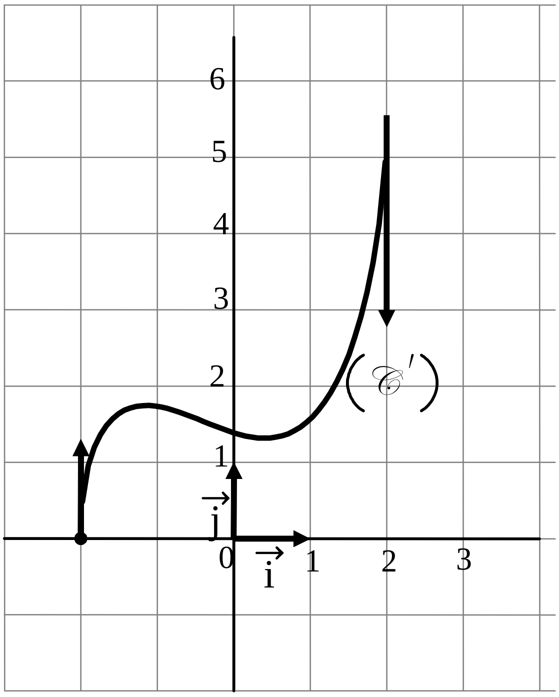
Tracer $(\mathcal{C})$ dans le même repère.

3/ Soit α un réel non nul appartenant à $\left[-2,\ 2\right]$. On désigne par $\mathcal{A}_\alpha$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et $\left(\mathcal{C}\ '\right)$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

a) Montrer que $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4 - x^2}\,dx$. (on distinguera les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).

b) Calculer $\mathcal{A}_\alpha$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes $(\mathcal{C})$ et $\left(\mathcal{C}\ '\right)$.



♣ EXERCICE 8 ♣

Soit la suite (S_n) définie sur IN^* par :$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right); \forall n \in IN^*$

1/ Justifier que $\forall n \in IN^*;\ S_n < 0$.

2/ Aprée avoir donner une expression simple de S_n ;prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

3/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{S_n}{n}\right)$.

♣ EXERCICE 9 ♣ *D'après un bac*

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction numérique à variable réelle définie par : $\begin{cases} f_n(x) = x(Logx)^n; \forall x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

1/ Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions f_1 et f_2 sur $[0,+\infty[$.

2/ Etudier les variations de f_1 et f_2 et tracer leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3/ On définie la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = \int_1^e f_n(x)dx$.

a- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b- Démontrer que $\forall n \in IN^*; u_n \geq 0$.

c- Démontrer que $\forall n \in IN^*; u_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n$.

En déduire que $\forall n \in IN^*; u_n \leq \frac{e^2}{n+1}$.

d- Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

♣ EXERCICE 10 ♣ Extrait du bac Tn 1995 session principale

1/ Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x + (x-2)Logx$.

a- Montrer que :

si $x > 1$ alors $g'(x) > 0$ et si $0 < x < 1$ alors $g'(x) < 0$.

b- En déduire que, pour tout réel x strictement positif, on a $g(x) \geq 1$.

2/ Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + xLogx - (Logx)^2$.

Etudier les variations de f et tracer (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm)

3/ Prouver que f admet une fonction réciproque f^{-1} puis tracer sa courbe (C') dans le même repère.

4/**a**- Calculer les intégrales : $I_1 = \int_1^e xLogx\,dx$ et $I_2 = \int_1^e (Logx)^2 dx$

b- On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C'). Calculer à 10^{-3}*près* la valeur de $\mathcal{A}$.

♣ EXERCICE 11 ♣

Soit la fonction $f : [1;+\infty[\to IR; x \mapsto x - x\ln x$.

1/ Etudier f et tracer C_f (courbe de f dans un RON $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$)

2/ Montrer que f est une application bijective puis tracer $C_{f^{-1}}$ la courbe de sa bijection réciproque.

3/ Soient les points $A(1;1)$ et $B(e;0)$ de C_f et $B'(0;e)$ de $C_{f^{-1}}$. Désignons par D le domaine du plan limité par les axes des coordonnées, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de C_f et l'arc $\overset{\frown}{AB'}$ de $C_{f^{-1}}$

a- Caculer l'aire de D.

b- Calculer donc la valeur de $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$.

♣ EXERCICE 12 ♣

1/ Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = Log(x+1) - Logx + \frac{x}{x+1}$

Calculer $\lim\limits_{+\infty} g$, étudier les variations de g . En déduire que $\forall x > 0; g(x) > 1$

2/ Soit la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x[Log(x+1) - Logx]$ si $x > 0$ et $f(0)=0$

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0^+.

b- Déterminer le signe de $f'(x); \forall x > 0$ a l'aide de 1/.

c- Vérifier que $f(x) = xLog\left(1 + \frac{1}{x}\right); \forall x > 0$. Calculer alors $\lim\limits_{+\infty} f$.

d- Dresser le tableau de variation de f.

3/**a**- Soit T la tangente à C_f (courbe de f dans un RON $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$) au point d'abscisse 1.

Déterminer le point d'intersection de T et la droite $\left(O;\vec{j}\right)$.

b- Construire T et C_f.

4/ Soit les suites (u_n) et (v_n) définient sur IN^* par :$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = Logu_n$

a- Déterminer le sens de variation de (v_n) et $\lim\limits_{+\infty} v_n$.

b- En déduire le sens de variation de (u_n) et $\lim\limits_{+\infty} u_n$.