L. B. Monastir	Série N : 68	4ème Math
P.P. : Ali Zouhaier		Séance n : 17
Chapitres : Expo. + logarithme + Intégrale +…		

Exercice 1 d'après un devoir

Soit F la fonction définie sur [0,+∞[par :

$$\mathrm{F}(0) = \ln(2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \quad \text{si } x > 0$$

1/a) En remarquant $\forall u \geq 0,\ 0 \leq e^{-u} \leq 1$, montrer que $\forall x \geq 0,\ 1-x \leq e^{-x} \leq 1$.

b) En déduire que $\forall t \geq 0$, on a : $t-\frac{1}{2}t^2 \leq 1-e^{-t} \leq t$.

c) Déduire de ce qui précède que $\forall x > 0$, on a : $1-\frac{3}{4}x \leq \frac{\ln(x)-F(x)}{x} \leq 1$

d) Montrer que F est dérivable à droite en zéro et que F'(0)=–1.

2/a) Montrer que $\forall x > 0$ et $\forall t \in [x,2x]$, $0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$.

En déduire que $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}$

b) Montrer que $\forall x > 0$, on a : $0 \leq F(x) \leq \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

3/a) Montrer que F est dérivable sur]0,+∞[et calculer F'(x) pour tout x > 0.

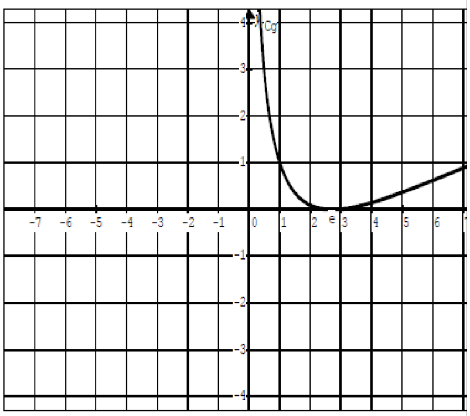
b) Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de la courbe représentative de F.

4/a) Montrer que F est une bijection de]0,+∞[sur]0,ln2[.

b) Etudier la dérivabilité de F^{-1} et calculer $(F^{-1})'(\ln 2)$.

Exercice N°2(6points)

La figure ci-dessous ,montre la courbe representative (Cg) ,dans un repere orthonormé ,de la fonction g définie sur l'intervalle]0,+ ∞[par g (x)= (1- Lnx)^2.la courbe Cg admet une brnche parabolique de direction (Ox).Cg coupe (Ox) au point d'abscisse e



1) **Par lecture graphique**

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Determiner $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$

2) Soit h la restriction de g sur [e,+∞[.

Montrer que h realise une bijection de $[e,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$

3) Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[\ ,\ g^{-1}(x) = e^{1+\sqrt{x}}$

4) Pour tout n $\in IN^*$ on pose $I_n = \int_1^e (1-Lnt)^n\,dt$

a)Calculer I_1

b) En utilisant une integration par partie montrer que pour tout n de N* on a $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

c) On désigne par A et B les points de C_g d'abscisses respectifs 1 et e .Soit V le volume du solide de revolution engendré par la rotation de l'arc AB de la courbe (C_g) autour de l'axe des abscisses .Calculer V

Exercice 3 (6 points)

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1/ Démontrer que $f'(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$.

2/ Dresser le tableau de variation de f .

3/ Tracer C_f.

4/ Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on considère l'intégrale $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$.

a- Calculer I_2.

b- Montrer par récurrence que $\forall n \geq 2;\ I_{n+1} = -\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (n-1)I_n$.

c- Calculer I_3.

5/a- Etablir que $\forall x \in [1;2].\ 0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.

b- Déterminer alors la limite de la suite (I_n).

Exercice n° : 3 (4 points)

1. Soit f la fonction définie sur [1 ; +∞[par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur [1 ; +∞[par : $H(x) = \int_1^x f(t)dt$.

a. Justifier que f et H sont bien définies sur [1 ; +∞[

b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

c. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre H(3).

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre H(3).

a. Montrer que pour tout réel x > 0, $\frac{x}{e^x - 1} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b. En déduire que $\int_1^3 f(x)dx = 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - e^{-x}\right)dx$.

c. Montrer que si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$

d. En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln\left(1 - e^{-x}\right)dx$ puis de $\int_1^3 f(x)dx$.

Exercice 5 (**4 points**)

On considère la fonction f définie sur IR^+ par

$f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$ $si\ x > 0$

C_f est la courbe de f dans un repère orthonormé (unité graphique 3 cm)

1/a) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

b) Montrer que f est dérivable sur IR^+ et $\forall x \in IR_+^*;\ f'(x) = \frac{1-3x}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$.

c) Dresser alors le tableau de variation de f et construire C_f.

2/ Soit α un réel vérifiant $\alpha > 1$.

a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations respectives y=0, x=1 et x=α.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$.

3) Soit F définie sur $[1;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x t^2 f(t)$ dt.

a) Montrer que F est dérivable sur [1;+∞[et expliciter $F'(x);\ \forall x \geq 1$.

b) Montrer que $\forall x \geq 1;\ \frac{1}{e}\ln(x) \leq F(x) \leq e^{-\frac{1}{x}}\ln(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de F et tracer l'allure de la courbe de F en précisant la demi tangente en $A(1;F(1))$.