L. B. Monastir	**Série n : 48**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Fonctions exponentielles + ...		

Exercice 1

Soit la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{2}{e^x + 1};\ \forall x \in IR.$

Désignons par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé R.

1/ Préciser les asymptotes à C_f.

2/ Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f.

3/a- Déterminer les réels a et b tel que $\dfrac{1}{e^x + 1} = a + \dfrac{be^x}{e^x + 1};\forall\ x \in IR.$

b- Calculer $\mathcal{A}$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations respectives $y = x;\ x = 0$ et x=ln(2).

4/ Soit la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par : $u_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}(f(x) - x)dx.$

a- Sans calculer u_n prouver que $u_n \geqslant 0;\ \forall n \in IN^*.$

b- Montrer que $\forall n \in IN^*;$ $u_n = 2\ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right).$

c- Montrer que $u_1 + u_2 + u_3 +\ldots+u_n = 2\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) + 2\ln(2).$

d- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right).$

Exercice 2

Soit la suite

1/a- A l'aide d'une intégration par parties ,montrer que $I_1 = -1.$

b- Montrer que $\forall n \in IN^*; I_{n+1} = I_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e.$

c- Montrer que $I_n = e\left(\dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} -\ldots+\dfrac{(-1)^n}{n!}\right) - 1$

2/a- Démontrer que $0 \leq \int_1^e (Logt)^n dt \leq e - 1.$

b- En déduire que $|\ I_n\ |\leq \dfrac{e-1}{n!}.$

c- Que peut-on dire pour la suite (I_n) ?

3/ $\forall n \in IN^*$ on pose $S_n = \dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} -\ldots+\dfrac{(-1)^n}{n!}.$

Déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n).

Exercice 3

Soit la fonction f : $[0;\dfrac{\pi}{2}[\to IR;$ $x \mapsto -Log(\cos x).$

1/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

Calculer $f^{-1}\left(Log\sqrt{2}\right).$

2/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} et montrer que $\forall x > 0$ on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

3/ Dessiner la courbe de f^{-1} dans un repère orthonormé.

4/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par :

$u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$;$\forall n \in IN.$

a- Mq l'équation $f(x) = x$ et $x\in]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}[$ admet une solution unique L.

b- Montrer que (u_n) est décroissante et que $\forall n \in IN; u_n \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right].$

c- Montrer que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 4 extrait d'un bac

Soit $\lambda \in IR_+^*$. On pose pour tout n de IN* $u_n = \int_0^{\lambda} e^{-nx^2}dt$.

1/ Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2/ Montrer que $\forall n \geq 2;\ 0 \leq \int_0^{\frac{1}{Logn}} e^{-nt^2}dt \leq \frac{1}{Logn}$.

3/ Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\frac{1}{Logn} \leq \lambda$.

4/ Montrer que pour $n \geq n_0$ on a :

$$0 \leq \int_{\frac{1}{Logn}}^{\lambda} e^{-nt^2}dt \leq (\lambda - \frac{1}{Logn})e^{-\frac{n}{(Logn)^2}}$$

5/ Conclure enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^{-x}Log(1 + e^{2x})$

1/ Soit $\varphi : t \mapsto \dfrac{2t-2}{t} - Logt$.

a- Prouver que l'équation $\varphi(t) = 0$ admet exactement deux solutions 1 et $\alpha \in]4,5[$.

b- Etudier le signe de $\varphi(t)$ pour $t \in IR_+^*$.

2/a- Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\varphi(1 + e^{2x})$.

b- Soit x_0 le réel pour lequel $f'(x_0) = 0$; démontrer alors que : si $x<x_0$ on a $f'(x) > 0$ et si $x>x_0$ on a $f'(x) < 0$.

c- Exprimer $f(x_0)$ à l'aide de α; puis donner un encadrement de ce maximum.

3/ En posant $X=e^{2x}$; montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

b- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 6

1/**a**- Démontrer que, pour tout n>0, l'équation $xe^{-\frac{1}{nx}} = 1$ a une et une seule solution α_n dans $]0,+\infty[$.

b- Vérifier que, pour tout n>0, $\alpha_n \geq 1$.

2/ Démontrer que α_n est solution de l'équation $x\ln(x) = \dfrac{1}{n}$.

3/ Soit h la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $h(x) = x\ln(x)$.

a- Etudier le sens de variation de h.

b- Prouver que : $1,76 < \alpha_1 < 1,77$.

c- Prouver que (α_n) est décroissante.

4/**a**- Justifier que (α_n) converge et que sa limite α est superieur ou égal à 1.

b- Démontrer que $h(\alpha) = 0$. En déduire la valeur de α.

Exercice 7

1/a- Dresser le tableau de variation de $g : IR \to IR$

$$x \mapsto (2-x)e^x - 2$$

b- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On notera α la solution non nulle.

c- Donner alors le tableau de signe de $g(x)$.

2/ Soit $f : IR \to IR; x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x - 1} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

a- Pq f est derivable sue IR et que $\forall x \in IR^*; f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$

b- Mq $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$.

c-• Mq $\forall x \in IR^*; f(x) = \dfrac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)^2 - \frac{1}{x^2}}$.

• • Dresser le tableau de variation de *f*.

• • • Préciser les branches infinies de la courbe de *f* puis tracer son *allure*.

Exercice 8

Soit $f : [0,+\infty[\to IR; x \mapsto e^{\sqrt{x}}$. C_f désigne la courbe de *f* dans un RON $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

$I/$ 1/ Prouver que *f* n'est pas dérivable à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

2/ Dresser le tableau de variation de *f*.

3/ Préciser la direction de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

4/ Tracer C_f.

5/ Soit $I = \int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,dt$. Interpréter géométriquement I.

II/1/ Mq *f* réalise une bijection de IR^+ dans un intervalle J à préciser.

2/ Déterminer $f^{-1}(x); \forall x \in J$.

3/ Tracer $C_{f^{-1}}$ (courbe de f^1) dans le même repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

4/a) A l'aide de deux intégrations par parties calculer la valeur de A'=$\int_1^e f^{-1}(t)dt$.

b) En profitant de **4/a**) trouver la valeur de I.

III/ Soit $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = F(x^2); \forall x \geq 0$.

1/ Mq $\forall x \in IR^+; G'(x) = 2xe^x$.

2/ Calculer $G(0)$.

3/ Déduire de 1/ et 2/ et à l'aide d'une intégration par parties que $G(x) = 2xe^x - 2e^x + 2; \forall x \geq 0$.

4/ En profitant de G, retrouver enfin la valeur de I.

Exercice 9 *d'après un devoir*

Soit $f : [-1;+\infty[\longrightarrow IR; x \mapsto e^{-x}\sqrt{1+x}$

I/1/ Etudier la dérivabilité de *f* à droite en -1.

2/ Etudier les variations de *f*.

3/ Tracer C_f (courbe de *f*) dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

II/ Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1/ Mq $\forall t \in [n, n+1]; f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$.

2/ En déduire que $\forall n \in IN; f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

3/ Mq $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite convergente vers 0.

III/Soit la fonction $F : x \mapsto \int_{-1}^x f(t)dt$ (on ne demonde pas de calculer $F(x)$)

1/ Donner le domaine de definition de F.

2/ Mq F est dérivable sur $[-1;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

3/ Donner le sens de variation de F sur $[-1;+\infty[$.

4/a- Dmq $\forall t \geq -1; \sqrt{1+t} \leq \dfrac{t+3}{2\sqrt{2}}$.

b- En déduire que $\forall x \geq -1; F(x) \leq J(x)$ avec $J(x) = \int_{-1}^x \dfrac{(t+3)e^{-t}}{2\sqrt{2}}dt$.

5/ En integrant par parties calculer $J(x)$ et en déduire que $F(x) \leq \frac{3e}{2\sqrt{2}}$.