L. B. Monastir	Série n : 49	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Log. + Expo + Arithmétique + …		

▸ Exercice 1 ◂ Vrai - Faux

1/ La fonction $(x \mapsto \ln(\ln(x)))$ est définie sur $]0,+\infty[$ ☐

2/ La fonction f: $x \mapsto x\ln(x) - x$ réalise une bijection de IR_+^* sur f(IR_+^*) ☐

3/ Soit $\lambda \in [0,\ 1]$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par C:y$=1-e^{-x}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$ est égal à $\int_{\lambda}^{1}(1-e^{-x})dx$ ☐

4/ Le chiffre des unités de 7^{2009} est 6 ☐

▸ Exercice 2 ◂ QCM

Choisir la bonne réponse

3. Soit l'entier p = $(1989)^{2008}$, alors :
   a. $p \equiv 0[2]$ b. $p \equiv 1[10]$ c. le reste modulo 7 de p est 6.
4. Soit l'entier p = $(3411)^{577}$, alors
   a. $p \equiv 1[4]$ b. $p \equiv 3[4]$ c. $p \equiv 0[4]$
5. Soit N = $(22)^{3n+2} + (13)^{3n+1}$ où n est un point du plan orienté, alors
   a. $N \equiv 1[9]$ b. $N \equiv 2[9]$ c. N est divisible par 9.
6. Soit n un entier vérifiant : $n^2 + 2n \equiv 3[7]$, alors
   a. $n \equiv 2[7]$ b. $n \equiv 3[7]$ c. $n \equiv 1[7]$ ou $n \equiv 4[7]$

▸ Exercice 3 ◂ Bac

1) Cette question constitue une restitution organisée de connaissances
   a- Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
      Démontrer que si a ≡ b mod (7) et c ≡ d mod (7) alors ac ≡bd mod (7).
   b- En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls
      si a ≡ b mod (7) alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n$ mod (7).
2) Pour a =2 puis pour a = 3, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1$ mod(7).
3) Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   a- Montrer que : $a^6 \equiv 1$ mod(7).
   b- On appelle ordre de a mod (7), et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ mod(7).
      Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1$ mod(7).
   c-En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?
   d- Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
4) À tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
   Montrer que A2008 ≡ 6 mod (7).

▸ Exercice 4 ◂

On considère la suite (I_n) définie sur IN^* par $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

1/a- Montrer que (I_n) est décroissante sur IN^*.

b- Prouver donc que (I_n) converge.

2/ Montrer que $\forall n \in IN^*; 2I_{n+2} + (n+1)I_n = e$.

3/ Déduire de ce qui précède que $\forall n \in IN^*; \dfrac{e}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

4/ Calculer donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

5/ Calculer I_1. Trouver enfin la valeur de $J = \int_0^1 (x^5 + x^3)e^{x^2}dx$.

▸ *Exercice 5* ◂

Soit $f : IR_+^* \to IR; x \mapsto \dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$. C$_f$ est la courbe de f dans un repère orthonormé R $=\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1/ Déterminer le point I de C$_f$ telle que T$_I$ (la tangente en I) soit horizontale.

2/ Etudier f puis tracer C$_f$.

3/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} puis tracer sa courbe C$_{f^{-1}}$ dans R.

4/ Soit la fonction $\Psi : [0; \frac{\pi}{2}[\to IR; x \mapsto \int_1^{u(x)} f(t)dt$ avec $u(x) = e^{tgx}$.

a- Calculer $\Psi(0)$ puis $\Psi'(x); \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

b- Déduire $\Psi(x)$ en fonction de x de $[0; \frac{\pi}{2}[$.

5/ Calculer donc A l'aire de la partie du plan limitée par C$_{f^{-1}}$; l' axe des ordonnées et les droites d'équations respectives $y = 1$ et $y = e$.

▸ *Exercice 6* ◂ Bac

Soit la fonction $f : [0, +\infty[\mapsto IR; x \mapsto f(x) = x\ln(1+x)$.

1/ Prouver que f possède une bijection réciproque f^{-1}.

2/a- Déterminer $\Delta \cap C_f$ avec $\Delta : y = x$

b- Etudier la position relative de Δ et C_f.

3/a- Tracer,dans un même repère orthonormé, les courbes de f et f^{-1}.

b- Déterminer les réels a,b et c tels que $\dfrac{x^2}{1+x} = ax + b + \dfrac{c}{1+x}; \forall x \neq -1$

b- Calculer alors $\mathcal{A} = \int_0^{e-1} f^{-1}(x)dx$.

▸ *Exercice 7* ◂

1. a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le couple $(14n+3, 21n+4)$ est solution de l'équation (E) : 3x – 2y = 1.
   b. En déduire $(14n+3) \wedge (21n+4)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $d = (2n+1) \wedge (21n+4)$.
   a. Montrer que d = 1 ou d = 13 .
   b. Montrer que d = 13 si et seulement si $n \equiv 6[13]$
3. Pour tout entier naturel n distinct de 1, on pose $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.
   a. Montrer que A et B sont divisibles par (n-1).
   b. Déterminer suivants les valeurs de n, $A \wedge B$.

▸ *Exercice 8* ◂

Le plan est muni d'un un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M(x, y) tels que : $x^2-4y^2-2x+5=0$

et par $\mathcal{P}$ l'ensemble des points M(x, y) tels que : $-4y^2-2x+5=0$

1. a. Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets et les asymptotes.

   b. Montrer que $\mathcal{P}$ est une parabole dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice.

   c. Construire $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ dans le même repère.

   d. Vérifier que la droite T d'équation : $x+2\sqrt{5}y-5=0$ est une tangente commune à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ au point $A(0,\frac{\sqrt{5}}{2})$

2. Pour tout $x\geq 0$, on pose : $F(x)=\int_1^{e^x-e^{-x}+1}\sqrt{4+(t-1)^2}\,dt$

   a. Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x\in[0,+\infty[$ $F'(x)=(e^x+e^{-x})^2$

   b. En déduire l'expression de F(x) pour tout $x\in[0,+\infty[$.

   c. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{H}$ et les droite respectives $x=1$, $x=\frac{5}{2}$. Montrer que $\mathcal{A}=\frac{15}{8}+2\ln 2$.

Exercice 5 : (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)e^{-2x}$ et on note (*C*) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

I-

1) Etudier les variations de f.
2) Tracer (*C*).

II- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $I_n=\int_0^n(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx$

1)a- Montrer que pour tout réel positif t on a : $1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1$.

b- En déduire que pour tout réel positif x : $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$.

c- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $x-\frac{x^2}{2n}\leq n\ln(1+\frac{x}{n})\leq x$

Puis que $e^{x-\frac{x^2}{2n}}\leq(1+\frac{x}{n})^n\leq e^x$

d- Montrer alors que $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}}dx\leq I_n\leq 1-e^{-n}$.

2)a- Etudier le sens de variation de la fonction : $x\to e^{-x}+x-1$ sur $\mathbb{R}_+$.

En déduire que pour tout réel positif x : $1-x\leq e^{-x}$.

b- En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1-\frac{x^2}{2n}\leq e^{-\frac{x^2}{2n}}$.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}}\,dx \geq \int_0^n \left(e^{-x} - \frac{x^2}{2n}e^{-x}\right)dx$

d- Calculer $\int_0^n x^2e^{-x}dx$, en déduire que : $I_n \geq 1 - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{2}\right)e^{-n}$.

Montrer alors que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite.

▸ *Exercice 9* ◂ Bac Liban 2003

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur sin par

$$\begin{cases} x_0 = 3;\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1;\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1/ Démontrer par récurrence sur n, que $x_n = 2^{n+1} + 1$

2/a- Calculer $x_8 \wedge x_9$, puis $x_{2002} \wedge x_{2003}$.. Que peut-on en déduire pour ces couples de nombres ?

b- x_n et x_{n+1} sont ils premiers entre eux pour tout entier n ?

3/a- Démontrer que pour tout n, $2x_n - y_n = 5$. En déduire y_n en fonction de n.

b- Etudier, suivant les valeurs de l'entier p le reste de la division euclidiennne de 2^p par 5.

c-On pose $d_n = x_n \wedge y_n$; démontrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$. En déduire l'ensemble des entiers n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

▸ *Exercice 10* ◂ **extrait du bac Tn 1996 s. pr.**

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN^*}$ définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1/a- Etudier les variations de $f{:}x \mapsto Log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2};\forall x > 0$

b- Déduire que : $Log(n+1) - Log(n) \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{4n^2}$ $\qquad (1)$

puis conclure que : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$.

2/ Démontrer alors que : $u_{n+1} \leq u_n e^{-\frac{1}{4n}}$.

et en déduire que : $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.

3/ Démontrer en utilisant la relation (1) que : $Log(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

et en déduire que : $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}Log(n+1)}$.

4/ Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$