L. B. Monastir	**Série n : 50**	$4^{ème}$ *Math*
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Arithmétique + ...		

Exercice N° : 1 Vrai - Faux

1/ Le chiffre des unités de 7^{2010} est 5 ☐

2/ Soit $n \in IN^*$ tel que $n \equiv 1 \quad [2]$. On a :$1 + 2 + 3 + \dots + n \equiv 0 \quad [n]$ ☐

3/ Si $n \in IN^*$ tel que $n \not\equiv 0 \quad [17]$. On a : $n^{16} - 2 \equiv 16 \quad [17]$ ☐

Exercice N° : 2 Montrer que

(1) : $\forall n \in IN;\ 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

(2) : $\forall n \in IN;\ n(n^2 + 2)(7n + 1)$ est divisible par 6

(3) : $\forall n \in IN^*;\ 9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

(4) : $\forall n \in IN;\ 3n^4 + 5n + 1$ est impair

Exercice N° : 3

Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 7 \quad [21] \\ x \equiv 11 \quad [13] \end{cases}$

1/ Vérifier que $n_0 = 154$ est une solution de (S)

2/ Soit x_0 une solution particulière de (S). Montrer que :

x est une solution de $(S) \Leftrightarrow x$ est solution du système (S'): $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0\ [21] \\ x - x_0 \equiv 0\ [13] \end{cases}$

3/ Résoudre alors (S).

4/ Une marchandise est mise dans des cartons à 21 pièces le dernièr carton ne contient que 7 pièces et si elle est mise dans des cartons à 13 pièces le dernièr carton ne contient que 11. Déterminer les nombres possibles de pièces de cette marchandise sachant qu'on a moins de 500 pièces.

Exercice N° : 4 *Bac étrangère*

1/ Démontrer que, pour tout entier naturel n; $2^{3n} - 1$ *est* un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+1} - 4$ est un multiple de 7

2/ Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.

3/ Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier:

$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7.

b) Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.

c) Etudier le cas où $p = 3n + 2$.

4/ On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire

$a = \overline{1001001000}$ et $b = \overline{1000100010000}$.

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p.

Sont-ils divisibles par 7 ?

Exercice 5 (Bac) (légèrement modifié)

Soit n un entier naturel non nul. On considère les nombres a et b définis par a=2n+3 et b=5n-2.

1/ Montrer que tout diviseur commun de a et b est un diviseur de 19

2/**a**- Montrer que si $n \equiv 8$ (mod 19) alors $a \wedge b = 19$.

b- Vérifier que si n n'est pas congru à 8 modulo 19 alors 2n+3 n'est pas divisible par 19.

3/ En déduire les valeurs de n pour les quelles la fraction $\frac{2n+3}{5n-2}$ est irréducti

Exercice 6   d'après un devoir

A/ Soit n un entier naturel.

1/ Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de 4^n par 9.

2/ Soit le nombre $A_n = (3n-1)4^n + 1$

a- Vérifier que si n=3q, avec $q \in IN$, alors A_n est divisible par 9.

b- Démontrer que pour tout entier naturtel n, l'entier A_n est divisible par 9.

B/**1**) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + x + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod } 7)$

2) Démontrer que pour tout $n \in IN$, n^3 est de la forme 7k, 7k+1 ou 7k-1 avec k un entier naturel.

Exercice 7   *d'après un devoir.*

1)a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation: $x^2 \equiv 8 \quad [41]$

b) Etablir l'équivalence: $x^2 - 19x - 10 \equiv 0 \quad [41] \quad \Leftrightarrow \quad (x+11)^2 \equiv 8 \quad [41]$

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation: $x^2 - 19x - 10 \equiv 0 \quad [41]$

2) Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $6^n + 13^{n+1}$ est divisible par 7.

3)a) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste modulo 7 de 2^n.

b) En décrire que si n n'est pas un multiple de 3 alors $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7.

Exercice 8   *Bac étrangère*

1. Pour a = 2 puis pour a = 3, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$.

2. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$.

b. On appelle ordre de a modulo 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$.

En déduire que k divise 6.   Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

3. A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.

Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \ (\text{mod } 7)$.

▸ Exercice 9 ◂   *La Réunion, Juin 2004*

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1 \ [p]$.

(b) Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \ [p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1 \ [p]$.

(c) Soit b tel que $2^b \equiv 1 \ [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1 \ [p]$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$. On prend pour p un facteur premier de A.

(a) Justifier que : $2^q \equiv 1 \ [p]$.   (b) Montrer que p est impair.

(c) Soit b tel que $2^b \equiv 1 \ [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

Montrer, en utilisant **1**. que b divise q. En déduire que b = q.

(d) Montrer que q divise p - 1, puis montrer que $p \equiv 1 \ [2q]$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme 34m+1, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307.
En déduire que A_1 est premier.