L. B. Monastir	**Série n : 51**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitres : Révision 1 (Mars)		

Exercice 1 ♦

1/ A l'aide d'une calculatrice déterminer le reste de division euclidienne de 3^{13} par 71.

2/ On se propose de résoudre dans IN l'équation (E) : $x^{27} \equiv 3 \quad [71]$

Soit x une solution de (E).

a) Vérifier que 71 est un nombre premier.

b) Montrer que $71 \wedge x = 1$ puis que $x^{70} \equiv 1 \quad [71]$

c) En remarquant que $27 \times 13 - 70 \times 5 = 1$ prouver que $x \equiv 3^{13} \quad [71]$

3/ Soit x un entier naturel. Montrer que si $x \equiv 3^{13} \quad [71]$ alors x est une solution de (E).

4/ Montrer enfin que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des entiers naturels de la forme 18+71k avec $k \in$ IN.

Exercice 2

1/**a**- Trouver tous les couples (p, q) d'entiers relatifs vérifiant $7p - 5q = 2$.

b- En déduire les entiers relatifs x qui vérifient $\begin{cases} x \equiv -1 \quad [5] \\ x \equiv -3 \quad [7] \end{cases}$

2/ Soit l'entiers $N = a_n \times 6^n + a_{n-1} \times 6^{n-1} + a_{n-2} \times 6^{n-2} + \ldots + a_1 \times 6^1 + a_0$ avec $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n-2},\ \ldots a_1$ et a_0 sont des chiffres. On note que N est écrit encore sous la forme $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}$ dans la base 6.

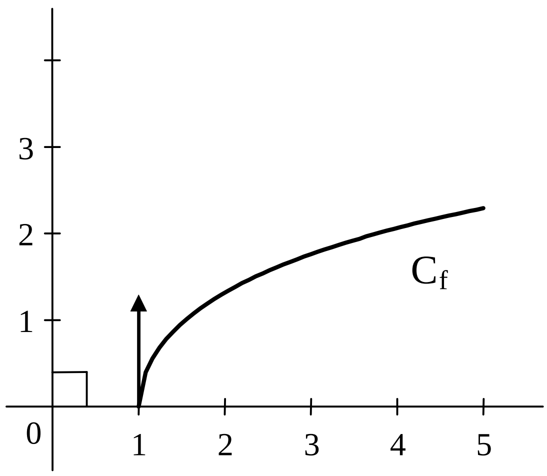
a- Justifier que pour tout entier naturel k on a : $6^k \equiv 1 \quad [5]$ et $6^k \equiv (-1)^k \quad [7]$

b- Déduire que si N est divisible par 35 alors

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0 \equiv 0 \quad [5] \\ (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \ldots + a_2 - a_1 + a_0 \equiv 0 \quad [7] \end{cases}$$

3/ Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier $N = \overline{10x005y}$ dans la base 6 soit divisible par 35.

Exercice 3 ♦



Dans la figure ci-dessus C_f est la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé .

1/**a**- Par une lecture graphique donner le tableau de variation de f

b- Prouver que f admet une fonction récioproque f^{-1}.

c- Tracer la courbe de f^{-1} sur le même graphique.

2/ Sachant que f$(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$

3/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$.

Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n > 1$.

4/ Soit la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n);\ \forall n \in IN^*$

a- Calculer v_0.

b- Vérifier que $v_{n+1} = 2v_n;\ \forall n \in IN$

c- En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

d- Montrer enfin que $u_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n}\right]$.

Exercice 4 *d'après un devoir*

Soit f la fonction définie sur [0;+∞[par f$(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$

1/ Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

2/ Dresser le tableaub de variation de f et tracer sa courbe C_f dans un RON.

3/a) Montrer que f réalise une bjection de [0;+∞[sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$ pour tout $x \in J$.

c) Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ admet dans]0;1[une solution unique α et que $0,7 < \alpha < 0,8$.

4/ Pour tout $n \in IN^*$ on pose pour tout $x \in [0,1[$ $F_n(x) = \int_0^{g(x)} (f(t))^n dt$ avec $g(x) = f^{-1}(x)$ et on note aussi $I_n = F_n(\alpha)$.

a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$ F_n est dérivable sur $[0,1[$ et que

$$F'_n(x) = \frac{2x^{n+1}}{1-x^2}.$$

b- Calculer $F'_{n+2}(x) - F'_n(x)$ en fonction de x. En déduire que

$$F_{n+2}(x) - F_n(x) = \frac{-2x^{n+2}}{n+2}$$

c) Déduire de ce qui précède que $I_{n+2} = I_n - \frac{2\alpha^{n+2}}{n+2}$

5/a) Calculer I_2 en fonction de α.

b) Montrer que pour tout n de IN^*; $I_{2n} = \alpha - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{2k}$.

c) Montrer que pour tout n de IN^*; $0 \leqslant I_n \leqslant \alpha^{n+1}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{2k}\right)$.

Exercice 5 *d'après un devoir*

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. On considère l'application f du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z=x+iy avec x et y réels, associe le point M' d'affixe z'=x'+iy' avec

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$$

1/ Exprimer z' en fonction de z.

2/ Montrer que f est une isométrie qui d'admet pas de point invariant.

3/ Montrer que f est une symétrie glissante.

4/a- Soit le vecteur $\vec{u} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{2}{5}\vec{j}$, donner la forme complexe de la translation de vecteur $-\vec{u}$.

b- En déduire l'ensemble des points invariants par $f \circ t_{-\vec{u}}$.

c- Caractériser alors f.

Exercice 6

I) **1**/ Drésser le tableau de variation de la fonction $f\,:\,x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$

2/ Prouver que l'équation $f(x) = x$ possède une seule solution α et que $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 0$.

3/ Donner le tableau de signe de $(f(x) - x)$.

4/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a- Montrer que $\forall n \in IN; -\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 0$.

b- Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est α.

5/ Préciser le sens de variation de $g = fof$ sur $]-\dfrac{1}{2};0[$.

II) Soient les suites $(v_n)_{n\in IN}$ et $(w_n)_{n\in IN}$ définies par : $v_n=u_{2n}$ et $w_n=u_{2n+1}$.

1/a- Trouver une relation reliant v_{n+1} et v_n intervenant la fonction de f.

b- Etudier alors la monotonie de (v_n).

2/ Etudier la monotonie de (w_n).

3/a- Montrer que $\forall (x,y) \in \left[-\dfrac{1}{2};0\right]$; $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{16}{27}|x-y|$.

b- Déduire que $\forall n \in IN; |v_{n+1} - w_{n+1}| \leq \left(\dfrac{16}{27}\right)^2 |v_n - w_n|$.

c- Montrer par récurrence que $\forall n \in IN; |v_n - w_n| \leq k^n |v_0 - w_0|$ avec $k=\left(\dfrac{16}{27}\right)^2$

4/ Montrer que $\forall n \in IN; w_n < \alpha < v_n$

5/ Prouver enfin que (u_n) converge vers α.

Exercice 7 *d'après un devoir*

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère les points A et A' d'affixes respectives $(-a)$ et $(-\bar{a})$ où a est un nombre complexe non réel donné.

Soit f l'application de $P\backslash\{A'\}$ dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z+a}{z+\bar{a}}$ et $(E)\,:\,z^2 + (\bar{a} - 1)z - a = 0$ l'équation dans $\mathbb{C}$ d'inconnue z.

1/ Montrer que (M' appartient au cercle trigonométrique) si et seulement si (M appartient à la médiatrice de $[AA']$)

2/ Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation (E).

3/ On suppose que : $a = 1 + ik,\ k \in IR^*.$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

4/ On suppose dans cette question que : $a = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

a- Calculer a^2. En déduire le module et un argument de a.

b- Montrer que si (z_1 et z_2 sont solutions de (E)) alors ($|z_1||z_2| = 2$ et $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv -\dfrac{3\pi}{8} \quad [2\pi]$)

5/ On suppose dans cette question que $a=ie^{i\theta}$ où θ est un réel de $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$.

a- Mettre sous la forme exponentielle a et $(1-\bar{a})$.

b- Montrer que :

si (z_1 et z_2 sont solutions de (E)) alors ($\arg(z_1+z_2) \equiv \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2} \quad [2\pi]$)

6/ Montrer que : z' est réel si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Re}(a)$.

7/ Soit $n \in IN^*$. Montrer que : si $(z')^n = 1$ alors z est réel.

Exercice 2 *Bac*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.(on choisira 2 cm comme unité graphique). Soit (E) la conique d'équation $3(x+1)^2 + 4y^2=12$.

1/a- Quelle est la nature du conique ?

b- Construire (E).

c- Déterminer les éléments caractéristiques de (E).

2/ A chaque point M de (E) de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $z = x + iy$ affixe de M.

a) Démontrer que $|z| = \frac{1}{2}(3 - x)$.

b) En déduire que $|z| = \frac{3}{2 + \cos\theta}$; θ est un argument de z.

3/ Soient M' et M'' les points de (E) dont les affixes z' et z'' ont pour arguments respectifs θ et $\theta + \pi$.

a) Calculer $\left\|\overrightarrow{M'M''}\right\|$ en fonction de θ.

b) Déterminer θ pour que $\left\|\overrightarrow{M'M''}\right\|$ soit maximum puis minimum.

Exercice 9 origine inconnu !

1/ Soit $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}]$ et (E) l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 - \frac{4}{\sin\theta}z + \frac{13}{\sin^2\theta} - 9 = 0$$

a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z' et z'' les solutions de (E) avec $\mathrm{I}_m(z') \geq 0$.

b- Pour quelle valeur de θ on a : $|z'|^2 = 43$.

2/ Soit M' et M" les points images de z' et z'' dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a- Montrer que M' et M" varie sur une partie d'une hyperbole $(\mathcal{H})$ dont on présisera une équation cartésienne.

b- Préciser les sommets et les asymptotes de $(\mathcal{H})$ puis construire $(\mathcal{H})$.

3/ On pose $\mathrm{u}(x) = e^x + e^{-x}$ avec $x \in IR^+$ et $\mathrm{F}(x) = \int_2^{u(x)} \sqrt{t^2 - 4}\, dt$.

a- Calculer $\mathrm{F}'(x)$.

b- Montrer que $\mathrm{F}(x) = \int_0^x (e^t - e^{-t})^2 dt$ puis calculer $\mathrm{F}(x)$ en fonction de x.

c- Calculer $u(\ln(2))$ puis déduire l'aire de la partie limitée par $(\mathcal{H})$ et les droites $\Delta : x = 2$ et $\Delta' : x = \frac{5}{2}$.

Exercice N°4: (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé $(o , \vec{u} , \vec{v})$, on donne les points A (- i) et B (i) .

Soit f l'application de P \ { A } dans P \ { B } qui a tout point M(z) associe le point M '(z') tel que : $z' = \frac{iz+1}{z+i}$

1°) On suppose $M \neq A$ et $M \neq B$

a) Montrer que $(\vec{u} , \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA} , \overrightarrow{MB})\ [2\pi]$

b) En déduire l'ensemble (E) des points M(z) tels que : z' est un réel non nul .

2°) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (F) : $(i z + 1)^3 = (z + i)^3$

a) Montrer que si z est une solution de (F) alors z est réel .

b) Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\left(\frac{1+i\, tg\, \alpha}{i + tg\alpha}\right)$. En déduire les valeurs de $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que tg α soit une solution de (F) .

3°) Soit θ un réel de l'intervalle $]0 , 2\pi[$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz + 2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$

b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixe respectives $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = 2i - e^{i\theta}$

i) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport a un point fixe que l'on précisera .

ii) trouver l'ensemble (Γ) décrit par M_1 et M_2 lorsque θ varie .

iii) Montrer que $(M_1M_2)^2 = 8 (1 - \sin\theta)$. Déduire la valeur de θ pour laquelle la distance M_1M_2 est maximale