EXERCICE N°4(5 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A ,B , M ≠ B et M' d'affixes respectives $1+2e^{i\theta}$, 1 , z et z' telle que $z'=\dfrac{z-1-2e^{i\theta}}{z-1}$.

1) Soit f l'application de P \{B} dans P qui à tout point M associe le point M' .

a) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation (E) :$z^2-2z+1+2e^{i\theta}=0$.

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E)

2) Dans cette question on suppose que $\theta=\pi$.

a) Montrer que $\left(\vec{u},\overrightarrow{BM}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv 0\ [2\pi]$

b) En déduire que la demie droite [BA) est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)$.

c) Montrer que z' est un imaginaire si et seulement si $|z| = 1$.

d) En déduire la construction du point M'image d'un point M du cercle trigonométrique de centre O

Exercice 5 : (4,5 points)

1. On considère l'équation (E) : $27x + 53y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E).
   b. Résoudre alors dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E)
   c. Quelle est l'inverse de 27 modulo 53 ?
2. Soient a et b deux entiers relatifs.
   a. Montrer que si $ab\equiv 0[53]$ alors $a\equiv 0[53]$ ou $b\equiv 0[53]$.
   b. En déduire que si $a^2\equiv 1[53]$ alors $a\equiv 1[53]$ ou $a\equiv -1[53]$.
3. On désigne par $\mathcal{R}$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 52.
   a. Prouver que pour tout entier $p\in\mathcal{R}$ il existe un unique entier $q\in\mathcal{R}$ tel que $pq\equiv 1[53]$.
   b. Déterminer tous les entiers $p\in\mathcal{R}$ tels que $p^2\equiv 1[53]$.
   c. Prouver que $52!\equiv -1[53]$.

Exercice 5:(5 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f_n(x)=\sqrt{x^n}e^{-\frac{x}{2}}$

On désigne par Γ_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, et par S_n le solide de révolution obtenu par rotation de Γ_n autour de l'axe (OX). Pour tout entier $n\geq 1$ on désigne par V_n le volume du solide S_n. On a représenté ci-dessous (**Figure1**) les courbes $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5$ et Γ_6 …

1. Que peut-on conjecturer quant à la monotonie et la convergence de la suite (V_n) ?

2. a. Calculer V_1 .

   b. Montrer que la suite (V_n) est monotone, en déduire qu'elle est convergente.

   c. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ $V_{n+1}=-\dfrac{\pi}{e}+(n+1)V_n$.

   d. En déduire que pour tout entier $n\geq 1$ $\dfrac{\pi}{e(n+1)}\leq V_n\leq\dfrac{\pi}{en}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $U_n = \dfrac{V_n}{n!}$.

a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ $U_{n+1} = -\dfrac{\pi}{e(n+1)!} + U_n$.

b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ $V_n = \pi n!(1 - \frac{1}{e}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!})$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$.

c. Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre les solides S_2 et S_5. (**Figure2**)

Figure 1

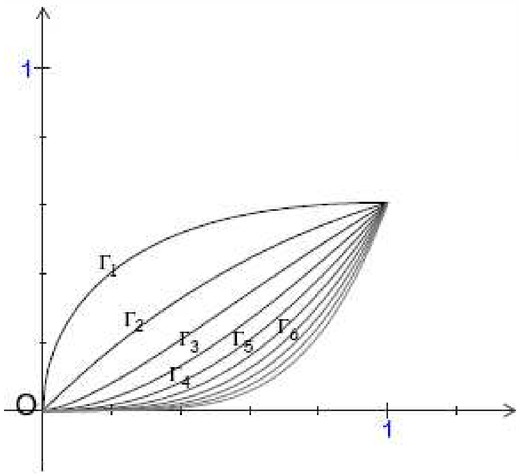
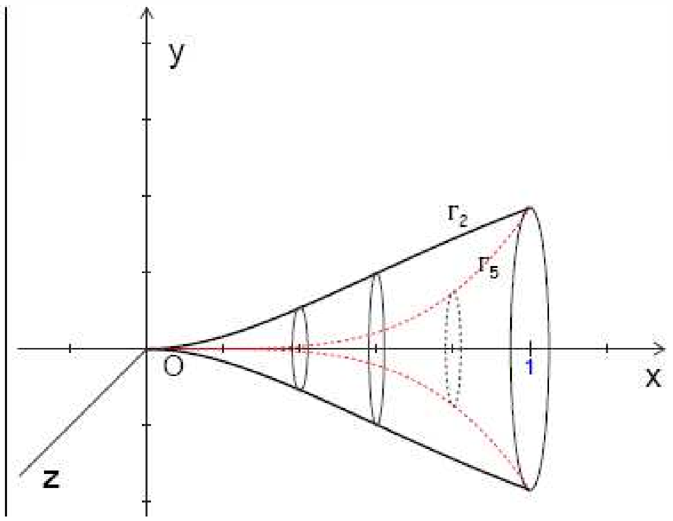


Figure 2



Exercice 3: (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère les points A , B ,C , A_1 et B_1 d'affixe respectives $z_A = -5$, $z_B = -1-4i$, $z_C = -1$, $z_{A_1} = -1+4i$ et $z_{B_1} = 3$.

1. a) Montrer que ABB_1A_1 est un carré de centre C.

   b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x-1$ est la médiatrice du segment $[AA_1]$.

2. On note h l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

   Déterminer les affixes des points $A' = h(A_1)$ et $B' = h(B_1)$.

3. Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -\dfrac{1}{2}i\bar{z} - 1 - \dfrac{1}{2}i$.

   a) Montrer que φ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

   b) Vérifier que $\varphi(A) = A'$ et $\varphi(B) = B'$.

4. a) Prouver que $h^{-1} \circ \varphi$ est un antidéplacement que l'on caractérisera.

   b) Caractériser φ.

Exercice 1 *(3 points)*

Répondre par vrai ou faux **en justifiant votre réponse** :

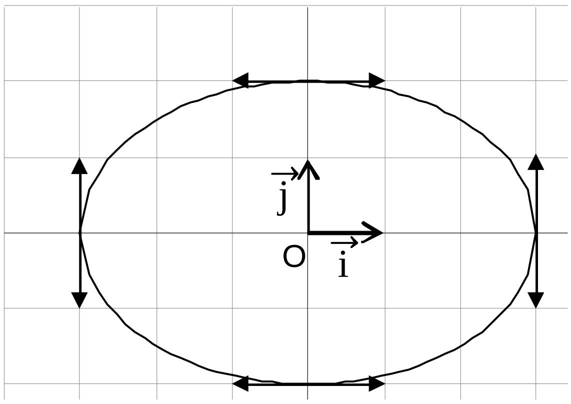
1/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) \right] = 1.$

2/ $\forall x > 0$; $\left[\int_O^{\ln x} \frac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}} dt \right]' = \frac{x-1}{x(x+1)}.$

3/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct

a- Soit f : M$(z) \mapsto M'(z')$ tel que z'=2$i\,\overline{z} + 1 + i$. L'axe de la similitude indirecte f à pour équation cartésienne $y = x$.

b- Un foyer de l'ellipse (E) tracer ci-dessous à pour coordonnées $\left(\sqrt{5}\,;0\right)$.



Exercice 3 *(4,5 points)*

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{i};\vec{j}\right)$. On considère l'hyperbole (H) : $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $\left(\frac{1}{\cos\theta}; 2\tan\theta\right)$ où θ est un réel de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

1-(a) Déterminer par leurs coordonnées les sommets et les foyers de (H). et donner les équations cartésiennes de ses deux asymptotes (Δ_1) et (Δ_2).

(b) Tracer (H) et placer ses foyers.

(c) Vérifier que le point M appartient à (H).

2/ Soit T_M la tangente à (H) en M. Montrer qu'une équation de T_M dans le repère $\left(O;\ \vec{i};\vec{j}\right)$ est 2x-ysin$\theta - 2\cos\theta = 0$.

3/ On désigne respectivement par P_1 et P_2 les points d'intersection de T_M avec les droites (Δ_1) et (Δ_2).

a- Donner les coordonnées des points P_1 et P_2.

b- Montrer que l'aire du triangle OP_1P_2 est indépendante de θ.

4/ Soit m un paramètre réel. Discuter suivant m la nature de l'ensemble $(\mathcal{C}_m)\ :\ 2(m^2+1)x^2 - my - 2m(m^2+1) = 0.$

Exercice 4 *(4,5 points)*

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre I et passant par A. On considère le point B tel que IA=IB et $\widehat{\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ \ [2\pi]$; O le milieu du segment

$[AB]$. La demi droite $[OI)$ coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en un point D.

1- Soit S la similitude directe de centre A et qui envoi I en O.
Déterminer le rapport et l'angle de S.

2/ Soit K le projeté orthogonal de A sur (BD).

a- Montrer que le triangle ADK est isocèle et rectangle en K.

b- En déduire que S$(D) = K$.

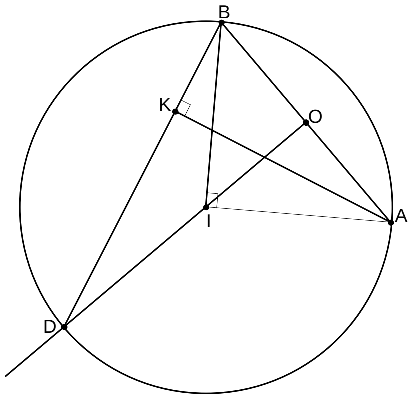
c- Soit J le milieu de $[AD]$; montrer que I ; J et K sont alignés.

3/ Soit σ la similitude indirecte qui envoi J en K et K en A.

a- Déterminer le rapport de σ.

b- Soit Ω le centre de σ. Caractériser $\sigma \circ \sigma$; déterminer $\sigma \circ \sigma(J)$ et en déduire que $\Omega = D$.

c- Déterminer l'axe de σ et montrer que $\sigma(I) = H$ où H est l'orthocentre de ABD.



Exercice 2 *(8 points)*

1/ Soit g la fonction définie sur IR par g$(x) = (x+1)e^{-x} - 1$

a- Déterminer le sens de variation de g.

b- Calculer g(0) puis déduire que 1-xe$^{-x} \succ 0$; $\forall x \in IR$

2/ Soit la fonction f : x $\mapsto \dfrac{e^x}{e^x - x}$.

a- A l'aide de la question précédente prouver que f est définie sur IR.

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- En déduire que $\forall x \geqslant 0$; $1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{e}{e-1}$.

3/**a**- Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.

b- Interpréter graphiquement le réel J=$\int_0^1 f(x)dx$.

4/ Pour tout n de IN* on pose I$_n = \int_0^1 x^n e^{-nx}dx$ et u$_n = 1 + I_1 + I_2 + \ldots + I_n$.

a- Calculer I$_1$.

b- Montrer que pour tout x $\in IR$;

$$1 + xe^{-x} + x^2e^{-2x} + \ldots + x^ne^{-nx} = \frac{1}{1-xe^{-x}} - \frac{x^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1-xe^{-x}}$$

c- En déduire que $0 \leqslant J - u_n \leqslant \dfrac{e}{(n+2)(e-1)}$ (on remarquera que $f(x)$=$\dfrac{1}{1\text{-}xe^{-x}}$)
puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5/ Soit $n \in IN^*$. On considère la fonction $F_n : [0;+\infty[\to IR; x \mapsto \int_0^x t^n e^{-t}dt$.

a- Montrer que $F_1(x) = 1 - (1+x)e^{-x}$.

b- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \geq 2$; on a: $F_n(x) = nF_{n-1}(x) - x^ne^{-x}$

c- Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN^*$; $F_n(x)$=$n!\left[1\text{-}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$ où $x \in IR_+^*$

d- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.