L. B. Monastir	**Série n : 53**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :

Chapitre : Coniques + Similitude + Aritmétique + Ln + exp + intég
N. Complexes + Espace + …

Exercice 1 Vrai - Faux

1/ Tout ensemble de point, d'équation de type $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ avec a, b, c, d et e cinq réels positifs, est une ellipse. ☐

2/ Soit (E) une ellipse admettant un point F comme l'un des foyers et (d) sa direction associée. Tout point de (E) est plus proche de F que de (d). ☐

3/ Soit P une parabole de foyer F, de directrice D, de paramètre p et K le projeté orthogonal de F sur D. Dans le repère orthonormé $\left(K,\frac{1}{p}\overrightarrow{KF},\vec{j}\right)$ l'équation de P est $y^2=2px$. ☐

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) \quad : z^3+4z^2+2z-28=0.$$

   a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(z-2)(z^2+az+b)=0.$$

   b. Résoudre (E)

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

$$z^2-4=4-\overline{z}^2.$$

   a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M. Montrer que : M appartient à (H) si et seulement si

$$x^2-y^2=4.$$

   b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3-i\sqrt{5}$ et $-3+i\sqrt{5}$. Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

   a. Déterminer les affixes de A′, B′ et C′, images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

   b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'. On note (H′) l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).
   - Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
   - En utilisant la question 2. a. prouver que : M' appartient à (H′) si et seulement si

$$x'y'=-2.$$

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A′, B′, C′, la courbe (H′), puis la courbe (H).

Exercice 3

Dans l'espace E muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère le plan P : $P : x+2y-z-4=0$ et l'ensemble S= {M$(x,y,z)\in$ E / $2x^2+2y^2+2z^2+8x-4y-8z+6=0$ }.

1/ Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon r.
2/ Vérifier que $H(-1,3,1)$ est un point commun de S et P.
3/ Déterminer la position relative de S et P.
4/ Soit Δ la droite passant par le point $A(1,0,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + a\vec{k}$ avec a un réel.

a- Déterminer la valeur de a sachant que Δ est parallèle à P. On prendra la valeur trouvée pour le reste de l'exercice.

b- Soit S' l'image de S par la translation T de vecteur $\vec{u}$. Déterminer une équation cartésienne de S'.

c- Montrer que S' est une sphère tangente à P et préciser le point H' de contact de S' et P.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

On considère l'équation

$$(1) \quad : \quad 20b - 9c = 2.$$

où les inconnues b et c appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

1. a. Montrer que si le couple $(b_0 ; c_0$ d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors c_0 est un multiple de 2.

   b. On désigne par d le p.g.c.d. de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

3. Déterminer l'ensemble des solutions $(b ; c)$ de (1) telles que p.g.c.d.$(b ; c) = 2$.

4. Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Le nombre entier naturel P, déterminé par $P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + ... + \alpha_1 r + \alpha_0$, où α_n, α_{n-1}, ..., α_1, α_0 sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r$, $0 \leqslant \alpha_{n-1} < r$,..., $0 \leqslant$, $\alpha_0 < r$ est noté $\overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite « écriture de P en base r ». Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base six et en base quatre respectivement).
   Montrer que $a+5$ est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a, puis de b et de c.
   Donner l'écriture de P dans le système décimal.

Exercice 4 *Bac France 2002* *(c)*

1/ On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers.

a- Déterminer un couple d'entiers (u,v) tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière (x_0,y_0) de l'équation (E).

b- Déterminer les couples d'entiers solutions de (E).

2/ Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace . On considère le plan (P) d'équation $6x + 7y + 8z = 57$.
On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan de *repère* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels; déterminer les coordonnées de ce point.

3/ On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a- Montrer que l'entier y est impair.

b- On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
Montrer que le reste de la division euclidienne de $p+z$ par 3 est égal à 1

c- On pose $p+z = 3q+1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x,p et q vérifient la relation $x + p + 4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d- En déduire les coordonnées de touts les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Exercice 5

Lespace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}; \vec{k}\right)$. On considère les points $A(2,1,-1)$ et $B\left(-5,\ 1,-4\right)$ et les droites Δ et D définies par :

$$\Delta : \begin{cases} x = 2-\alpha \\ y = 1 \\ z = -1+\alpha \end{cases} ;\ \alpha \in IR \text{ et } D : \begin{cases} x = -3+2\beta \\ y = -\beta \\ z = 2+\beta \end{cases} ;\ \beta \in IR.$$

1/a- Vérifier que $\Delta = (AB)$.

b- Donner deux points distincts E et F de D.

c- Prouver que Δ et D ne sont pas coplanaires.

2/ Soit Q un plan contenant Δ et parallèle à D.

a- Prouver que $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{EF}$ est un vecteur normal à Q.

b- Donner alors une équation cartésienne de Q.

3/ Soit $(P) : -3x+y+7z+1 = 0$. Vérifier que P est parallèle à Q.

4/ On note S_A la sphère de centre A et de rayon r$_A = \sqrt{29}$ et et S_E la sphère *de centre E* et de rayon r.

a- Montrer que S$_A$ est tangente à D.

b- Déterminer r de façon que S$_E$ soit tangente à Δ.

c- Montrer que $S_A \cap P$ est un cercle dont on précisera le rayon r'.

Exercice 6

Le plan P est muni d'un repère orthonormé R=$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ Soit l'ensemble $(E) : y^2 = \dfrac{9}{4}(4-x^2)$

a- Déterminer la nature de (E).

b- Préciser les sommets de (E) puis le construire dans R.

2/ Soit $G : [0;\pi] \to IR; x \mapsto G(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}\, dt.$

a- Calculer $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et montrer que $\forall x \in [0;\pi];\ G'(x) = -4\sin^2 x$

b- En déduire l'expression de $G(x)$ en fonction de x.

3/a- Hacher sur votre figure la partie (D) du plan limitée par (E) et les demi droites d'équation respectives $\begin{cases} x = 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

b- A l'aide de G calculer $\mathcal{A}(D)$ l'aire de D.

Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = \left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

Soit (H) une hyperbole telle que :

$\ast$ Le point O est le centre de (H).

$\ast$ Le point $A(3,0)$ est un sommet l'hyperbole (H).

$\ast$ Les asymptotes de (H) sont perpendiculaires.

Posons $(H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

1/ Déterminer a et b.

2/ Tracer l'allure de (H) dans R.

3/ Montrer que les points $F\left(\sqrt{2}\,a, 0\right)$ et $F'\left(-\sqrt{2}\,a, 0\right)$ sont les foyers de (H).

4/ Montrer que pour tout point $M(x,y) \in (H)$ on a : $MF \times MF' = OM^2$.

Exercice 8 bac

Soit $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ un repère orthonormé direct du plan P et f l'application de P\{B} vers P; qui à tout point M d'affixe z≠ i on associe le point M'=f(M) d'affixe z'=$\frac{iz}{\bar{z}+i}$. On note Δ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

1/a- Montrer que $\Delta = \{M \in P\backslash\{B\}$ / f$(M) = B\}$.

b- Déterminer l'ensemble ζ des points M tels que M' est le milieu de $[BM]$.

2/a- Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C}$\{i} on a $z' - i = \left[\frac{1-2\,\mathrm{Im}(z)}{|z-i|^2}\right](z-i)$.

b- En déduire que pour tout M∈ $P\backslash\{B\}$ les points B,M et M' sont alignés.

3/ Dans cette question on pose $z = x + iy; (x,y) \in IR^2$. On note H le projeté orthogonal de M sur la droite Δ : $y = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \{M \in P$ / $MB = MH\}$.

a- Montrer que γ est la parabole d'équation $y = x^2 + \frac{3}{4}$ puis tracer γ.

b- Montrer que pour tout point M∈ $P\backslash\{B\}$ on a $BM'.BM = 2MH$.

c- Montrer que lorsque M varie sur γ, le point M'varie sur un cercle ζ' que l'on précisera.

d- Trouver alors une construction géométrique du point M' à l'aide du point M.

Exercice 1 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.
   b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7\ (9)$.
2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1\ (9)$.
   b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.
   Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ (9)$.
   c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.
3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
   - B la somme des chiffres de A ;
   - C la somme des chiffres de B ;
   - D la somme des chiffres de C.

   a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\ (9)$.
   b. Sachant que $2\,005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72\,180$.
   c. Démontrer que $C \leqslant 45$.
   d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.
   e. Démontrer que $D = 7$.