L. B. Monastir	**Série n : 54**	**4 ème Math**
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :
Chapitre : Arithmétique +		

Exercice -1- *Vrai - Faux*

1/ **Si** $a,\ b$ et k sont des entiers relatifs non nuls alors
$(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$. ☐

2/ Si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors $a \vee b = |ab|$. ☐

3/ **Si** $a,\ b$ et k sont des entiers relatifs non nuls tels que $b = ka$
alors $a \vee b = b$ ☐

4/ Soit p un entier non nul. Soit l'équation $(E_p)\ :\ px + (p+1)y = 1$.
L'équation (E_p) admet toujours des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice -2- *QCM*

Choisir la bonne réponse

1/ (bac Tn 2008) Soit n un entier naturel tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7)$=35.
alors : P_1: $n \equiv 0 \pmod 3$ P_2: $n \equiv 0 \pmod 5$ P_3: $n \equiv 0 \pmod 7$

3/ Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$, alors $a_n = 0$ (mod 5) pour
a) tout entier naturel n pair **b**) tout entier naturel n **c**) tout entier naturel n impair

Exercice -3-

Pour tout n de $\mathbb{Z}$ on pose $x = 3n + 7$ et $y = n - 2$

1/ Montrer que si d est un diviseur commun de x et y alors d divise 13.

2/ Discuter suivant n la valeur de $x \wedge y$.

3/ Discuter suivant k le reste modulo 13 de 12^k.

4/ **Application** : Montrer que x et y sont premiers entre eux avec
$x = 3 \times 12^{2009} + 7$ et $y = 11\,(1 + 12^1 + 12^2 + 12^3 + \ldots + 12^{2008}) - 1$.

Exercice -4- *Bac Tn 1992*

1/ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_1)\ :\ 11x + 8y = 79$.
a- Montrer que si (x,y) est solution de (E_1) alors $y \equiv 3\ \ [11]$.
b- Résoudre alors l'équation (E_1).

2/ Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_2)\ :\ 3y + 11z = 372$.
a- Montrer que si (z,y) est solution de (E_2) alors $z \equiv 0\ \ [3]$.
b- Résoudre alors l'équation (E_2).

3/ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_3)\ :\ 3x - 8z = -249$.

4/ Le prix total de 41 pièces détachées, réparties en trois lots, est de
480 dinars. Le prix d'une pièce du premier lot est de 48 dinars.
Le prix d'une pièce du deuxième lot est de 36 dinars.
Le prix d'une pièce du troisième lot est de 4 dinars.
Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

Exercice -5- Bac Tn 2008

1/ Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ 3x - 8y = 5$.
Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x,y) tels que
x=$8k - 1$ et $y = 3k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2/**a**- Soit $n,$ x et y trois entiers tels que $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$

Montrer que (x,y) est une solution de (E).

b- On considère le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 2 \quad [3] \\ n = 7 \quad [8] \end{cases}$ où n est entier.

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23\ [24]$

3/**a**- Soit k un entier naturel.

Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b- Vérifier que 1991 est une solution de S et montrer que $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice -6- Bac

On considère l'équation $(1)\ :\ 20b - 9c = 2$ où les inconnues b et c appartiennent à $\mathbb{Z}$.

1/**a**) Montrer que si le couple $(b_0;c_0)$ est une solution de (1) alors c_0 est un multiple de 2.

b) On désigne par $d = b_0 \wedge c_0$ avec $(b_0;c_0)$ est une solution de (1).

Déterminer les valeurs possibles de d.

2/ Déterminer une solution particulière de (1) puis résoudre (1).

3/ Déterminer l'ensemble des solutions $(b;c)$ de (1) telles que $b \wedge c = 2$.

4/ Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Le nombre entier naturel P, déterminé par $P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + \ldots + \alpha_1 r^1 + \alpha_0$ où $\alpha_n,\ \alpha_{n-1}, \ldots,\ \alpha_1\ et\ \alpha_0$ sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r;\ 0 \leqslant \alpha_{n-1} < r;$ ..., $0 \leqslant \alpha_0 < r$, est noté $\overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite ≪ écriture de P en base r ≫.

Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$.

Montrer que a+5 est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a, puis de b et de c. Donner l'écriture de P dans le système décimal.

Exercice -7- *bac*

Partie A: **Question de cours**

1/ Enoncer le théorème de Bezout et le théorème de Gauss.

2/ Démontrer le théorème de Gauss le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 13 \quad [19] \\ n \equiv 6 \quad [12] \end{cases}$

1/ Démontrer qu'il existe un couple (u,v) d'entiers relatifs tel que $12u + 19v = 1$ (on ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple)

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre N=$13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2/**a**- Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut $\begin{cases} n \equiv n_0 \ [19] \\ n \equiv n_0 \ [12] \end{cases}$

b- Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \ [19] \\ n \equiv n_0 \ [12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0\ [19 \times 12]$.

3/**a**- Trouver un couple (u,v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b- Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourrat utiliser la question **2**/**b**-)

4/ Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lors qu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise n par 228=12×19. Quel est le reste r de cette division?

Exercice -8- Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2001

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers 14n +3 et 5n +1 sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) : 87x +31y = 2 où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier, en utilisant par exemple la question 1), que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que 87u +31v = 1 puis une solution (x_0 ; y_0) de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c. Application : Déterminer les points de la droite d'équation 87x -31y -2 = 0 dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Indication :On remarquera que le point M de coordonnées (x ; y) appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple (x ; y) vérifie l'équation (E).

Exercice 9 Baccalauréat S Pondichéry mai 2001

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$11n - 24m = 1.$$

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. recherche du P.G.C.D. de $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.

b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$\left(10^{11n}-1\right)-10\left(10^{24m}-1\right)=9.$$

c. Montrer que $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$.
(on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^0\right)$, valable pour tout entier naturel n non nul).
Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$\left(10^{11}-1\right)N-\left(10^{24}-1\right)M=9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$.