L. B. Monastir	**Série n : 54**	4 ^{ème} Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :
Chapitre : Coniques ...		

Exercice 1

Soient F et F' deux points du plan rapporté à un repère orthonormé $R = \left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.
d'affixes respectifs $1+i$ et $-1-i$. Soit (Γ) l'ensemble des points M un point variable d'affixe z tels que $|z+1+i| + |\bar{z}-1+i| = 4\sqrt{2}$.

1/ Montrer que $MF + MF' = 4\sqrt{2}$

2/ Donner une équation cartésienne de (Γ) dans le repère R.

3/ On donne $\vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right);\vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}-\vec{j}\right)$

a- Montrer que $R' = \left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ est un repère orthonormé du plan.

b- Vérifier que l'équation de (Γ) dans le repère R' est $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{6} = 1$

c- Quelle est la nature de (Γ) ? donner trois éléments caractérisant (Γ).

d- Construire (Γ).

Exercice 2 — **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) \quad : z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0.$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(z-2)(z^2 + az + b) = 0.$$

b. Résoudre (E)

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

$$z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2.$$

a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M.
Montrer que : M appartient à (H) si et seulement si

$$x^2 - y^2 = 4.$$

b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3-i\sqrt{5}$ et $-3+i\sqrt{5}$.
Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les affixes de A′, B′ et C′, images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'. On note (H′) l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).
- Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
- En utilisant la question **2. a.** prouver que : M' appartient à (H′) si et seulement si

$$x'y' = -2.$$

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A′, B′, C′, la courbe (H′), puis la courbe (H).

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. On considère l'ensen

$(E) = \left\{M(z) \text{ tel que } 10z\bar{z} + 3\left(z^2 + (\bar{z})^2\right) = 4\right\}$.

1/**a**- Déterminer une équation cartésienne de (E).

b- En déduire que E est une ellipse dont on précisera l'excentricité e, un foyer F et la directrice Δ associée à F.

c- Donner les quatre sommets A, A', B et B' de (E).

2/ Soit f la similitude directe de centre O ,de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a- Posons $F' = f(F)$, $\Delta' = f(\Delta)$ et $(E_1)=f\left((\mathrm{E})\right)$. Montrer que (E_1) est une ellipse d'excentricité e, de foyer F' et Δ' la directrice de (E_1) associée à F'.

b- Construire (E) et (E_1) sur un même dessin.

Exercice 3

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit l'ensemble $(E) : 4y^2 = 4 - x^2$

1/**a**- Déterminer et caractériser (E)

b- Construire (E).

2/ L'espace est muni du repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Désignons par V le volume du solide engendré par la rotation de (E) autour de l'axe des abscisses. Déterminer V.

Exercice 4 d'après un devoir

Soit $\lambda \in IR_+^*\backslash\{9\}$ et $C_\lambda : \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - 9} = 1$ dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/**a**- Déterminer les réels λ pour les quels C_λ est une ellipse.

b- Trouver les coordonnées des foyers dans ces cas.

2/**a**- Déterminer les réels λ pour les quels C_λ est une hyperbole.

b- Trouver les coordonnées des foyers dans ces cas ainsi que ses asymptotes.

3/ Construire C_{25} et C_5 (on fait chaque dessin à part)

4/ Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan P. Montrer qu'il existe deux courbes C_λ qui passent par M_0.

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = \left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.Soit g la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit (H) la courbe d'équation $y^2 - x^2 - 2\sqrt{3}\,xy+1=0$

1/ Quelles sont les expressions analytiques de g dans R?

2/**a**) Déterminer une équation cartésienne de (H') image de (H) par g.

b) Quelle est la nature de (H'). Préciser le centre , les asymptôtes Δ et Δ', les sommets A et A', l'excentricité e, un foyer F de (H') et (D) la directrice qui lui est associée.

3/**a**- Posons $F_1 = g^{-1}(F)$, $(D_1) = g^{-1}((D))$ et $M_1 = g^{-1}(M)$.

Montrer que (H) est l'hyperbole d'excentricité e, de foyer F_1 et de directrice associée (D_1).

b- Construire dans le même repère (H) et (H').

Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = \left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

Soit $(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ une hyperbole telle que :

$\ast$ Le point $A(3,0)$ est un sommet l'hyperbole (H).

$\ast$ Les asymptotes de (H) sont perpendiculaires.

1/ Déterminer a et b.

2/ Tracer l'allure de (H) dans R.

3/ Montrer que les points $F\left(\sqrt{2}\,a, 0\right)$ et $F'\left(-\sqrt{2}\,a, 0\right)$ sont les foyers de (H).

4/ Montrer que pour tout point $M(x,y) \in (H)$ on a : $MF \times MF' = OM^2$.