L. B. Monastir	**Série n : 56**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre : Arithmétique + Espace + …		

Exercice 1 Vrai - Faux

1/ Soient les hyperboles $(H)\ :\ \dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ et $(H')\ :\ -\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$

Ont les mêmes asymptotes ☐

2/ (H) est une hyperbole de foyer F et de directrice associée Δ et (P) une une parabole de foyer F et de directrice Δ.

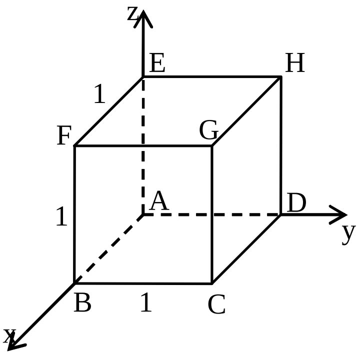
(H) et (P) ont deux point d'intersections. ☐

3/ (H) est une hyperbole équilatère alors l'excentricité de (H) est $\sqrt{2}$. ☐

Exercice 2 QCM

1/ (**d'après bac Tn 2008 section Sciences expérimentales**)

ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.
On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.



a- $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BH}$ est égal à :

$P_1)$ 0 $\quad P_2)$ $\sqrt{2}$ $\quad P_3)$ $\sqrt{3}$.

b- Une équation du plan (ECG) est :

$P_1)\quad x+y-2=0 \qquad P_2)\ x+y-1=0 \qquad P_3)\ x-y=0$

c- On désigne par I le milieu du segment $[EG]$.

Soit S la sphère de centre I et passant par F. Alors on a :

$P_1)$ Le plan (BEG) est tangent à la sphère S.

$P_2)$ L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle de (BEG) de diamètre $[EG]$.

$P_3)$ L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle circonscrit au triangle EGH.

2/ (bac Tn 2008) Soit n un entier naturel tel que $(5n)\wedge(3^2\times5^3\times7)=35$.

alors : P_1: n $\equiv 0\ \ (\text{mod } 3)$ $\quad P_2$: n $\equiv 0\ \ (\text{mod } 5)$ $\quad P_3$: n $\equiv 0\ \ (\text{mod } 7)$

3/ Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$, alors $a_n = 0$ (mod 5) pour

a) tout entier naturel n pair **b**) tout entier naturel n **c**) tout entier naturel n impair

▸ **Exercice 3** ◂

Pour tout n de $\mathbb{Z}$ on pose $x = 3n+7$ et $y = n-2$

1/ Montrer que si d est un diviseur commun de x et y alors d divise 13.

2/ Discuter suivant n la valeur de $x\wedge y$.

3/ Discuter suivant k le reste modulo 13 de 12^k.

4/ **Application** : Montrer que x et y sont premiers entre eux avec

$x = 3\times12^{2009}+7$ et $y = 11\,(1+12^1+12^2+12^3+\ldots+12^{2008})-1$.

▸ **Exercice 4** ◂ **Bac Tn 1992**

1/ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_1)\ :\ 11x+8y=79$.

a- Montrer que si (x,y) est solution de (E_1) alors $y\equiv 3\quad[11]$.

b- Résoudre alors l'équation (E_1).

2/ Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_2)\ :\ 3y+11z=372$.

a- Montrer que si (z,y) est solution de (E_2) alors $z\equiv 0\quad[3]$.

b- Résoudre alors l'équation (E_2).

3/ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_3)\ :\ 3x - 8z = -249$.

4/ Le prix total de 41 pièces détachées, réparties en trois lots, est de 480 dinars. Le prix d'une pièce du premier lot est de 48 dinars.
Le prix d'une pièce du deuxième lot est de 36 dinars.
Le prix d'une pièce du troisième lot est de 4 dinars.
Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

▸ Exercice 5 ◂ Bac Tn 2008

L'espace est muni d'un repère ortonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points A$\left(1,\ -4,\ 0\right)$, $B\left(4,-1,\ 3\right)$, $C(4,-4,-3)$ et $D\left(-2,\ 2,-3\right)$.

1/a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

2/ Calculer l'aire du triangle ABC.

3/ Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

4/a) Vérifier que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 27.

b) Calculer l'aire du triangle BCD.

c) En déduire la distance du point A au plan (BCD).

▸ Exercice 6 ◂ Bac Tn 2008 section math

L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère le tétraèdre $ABCE$ tel que $A(1,0,2)$, $B(0,0,1)$, $C(0,-1,3)$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

1/a- Vérifier que E a pour coordonnées $(0,2,3)$.

b- Calculer le volume du tétraèdre $ABCE$.

2/a- Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation : $x-2y-z+5=0$. Montrer que $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).

b- Soit K le point défini par $2\,\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{O}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan $\mathcal{P}$.

3/ Soit h l'homothétie de l'espace de centre E qui transforme le point C en K.

a- Déterminer le rapport de h.

b- Le plan $\mathcal{P}$ coupe les arrêtes $[AE]$ et $[EB]$ respectivement en I et J.
Calculer le volume du tétraèdre $EIJK$.

▸ Exercice 7 ◂ Bac

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère le les points $A(3,2,6)$, $B(1,2,4)$ *et* $C(4,-2,5)$.

1/a- Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b- En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

c- Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

2/ Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). $Mq\ OH=\dfrac{4}{3}$.

3/ Soit S *la* sphère de centre O et passant par A.

a- Justifier que l'intersection de S avec le plan (ABC)*est* un cercle $\mathcal{C}$ de centre H.

b- Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

▸ Exercice 8 ◂

Soit l'ensemble $S\ :\ x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$

1/ /Mq S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon r.

2/ Soit le point $A(1,0,2)$.Mq tout plan P contenant A est sécant à S

3/a- Determiner le plan Q passant par A et perpendiculaire à (IA).

b- Caractériser $S\cap Q$.

4/ Determiner les plans P parallèle à Q et tangent à S.

5/ Soit la famille des plan $\mathrm{P}_m\ :\ x+my+1=0; m\in IR$

a- Discuter suivant m l'intersection de P_m et S.

b- Déterminer les plans P_m qui coupent S en un cercle de P_m de rayon $\sqrt{23}$.

▸ Exercice 9 ◂

L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit les points A$(3,0,4)$ et B$(0,5,0)$ et le plan P=(OAB).

1/ Montrer que OAB est un triangle isocèle.

2/ Montrer que P : $-4x+3z=0$. (la vérification des poionts n'est pas acceptable)

3/ Déterminer O_1, A_1 et B_1 les images respectives de O, A et B par la translation T de vecteur $\vec{u} = 3\vec{i}$.

4/ Soit I$(a,0,0)$ avec a $\succ 3$. Posons $\{A'\}=(IA)\cap(O_1A_1)$ et $\{B'\}=(IB)\cap(O_1B_1)$.

Désignons par h l'homothétie de centre I et qui transforme O en O_1.

a- Prouver que h$(A) = A'$

b- Montrer que $O_1A'B'$ est un triangle isocèle.

c- Exprimer en fonction de a le rapport de h.

d- Exprimer en fonction de a le volume V du solide $OABO_1A'B'$.

▸ **Exercice 10** ◂ Bac (légèrement modifié)

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

On donne les points A(1 ; 1 ; 0) ; B(3 ; 2 ; 1) ; C(-1 ; 0 ; 1).

1/a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire le volume du tétraèdre OABC.

b- Vérifier que P=(ABC) : $x-2y+1=0$.

2/ Soit le plan Q: $3x-6y+z-8=0$.

a- Montrer que P et Q sont sécants suivant une droite D.

b- Déterminer les points M de D de coordonnées appartenant à $\mathbb{Z}$ et tels que $OM \leqslant 19$.

2/ Soit (S) la sphère de centre I(2,-1,3) et de rayon $\sqrt{14}$.

a- Vérifier que le tétraèdre OABC est inscrit dans la spère (S).

b- Déterminer le centre Ω et le rayon r du cercle (C) cisconscrit au triangle ABC.

3/a- Donner le centre et le rayon de la sphère (S')=$h_{(A,-3)}((S))$.

b- En déduire que P$\cap(S')$ est un cercle.

▸ **Exercice 11** ◂ *Bac France 2002*

1/ On considère l'équation (E) : $6x+7y=57$ où x et y sont des entiers.

a- Déterminer un couple d'entiers (u,v) tel que $6u+7v=1$; en déduire une solution particulière (x_0,y_0) de l'équation (E).

b- Déterminer les couples d'entiers solutions de (E).

2/ Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace . On considère le plan (P) d'équation $6x+7y+8z=57$. On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan de *repère* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels; déterminer les coordonnées de ce point.

3/ On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a- Montrer que l'entier y est impair.

b- On pose $y=2p+1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste de la division euclidienne de $p+z$ par 3 est égal à 1

c- On pose $p+z=3q+1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x,p et q vérifient la relation $x+p+4q=7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d- En déduire les coordonnées de touts les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels.

EXERCICE:2 (6pts)

1/a)quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11

b) quel est le reste de la division euclidienne de 6^{4} par 5

c) en déduire que $6^{40} - 1 \equiv 0(11)$ et $6^{40} \equiv 1(5)$

d) déduire que 6^{40} - 1 est divisible par 55

2/ dans cette question x et y désignent des entiers relatifs

a) montrer que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution

b) montrer que l'équation (E ') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution

c) déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de (E')

d) résoudre (E ')

prouver qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1(40)$

trouver cet entier

3) pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b(55)$ et si $a^{40} \equiv 1(55)$ alors $b^{33} \equiv a(55)$

▸ **Exercice 14** ◂ *Bac Tn 2008*

1/ Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ 3x - 8y = 5$.

Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2/a- Soit n, x et y trois entiers tels que $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$

Montrer que (x, y) est une solution de (E).

b- On considère le système $(S)\ :\ \begin{cases} n \equiv 2 \quad [3] \\ n = 7 \quad [8] \end{cases}$ où n est entier.

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23\ [24]$

3/a- Soit k un entier naturel.

Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b- Vérifier que 1991 est une solution de S et montrer que $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.