L. B. Monastir	**Série n : 56**	4 ^{ème} Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :

Chapitre : Espace + Arithmétique + Coniques + Similitude + …

Exercice 1 Vrai - Faux

1/ Soient les hyperboles (H) : $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ et (H') : $-\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

Ont les mêmes asymptotes ☐

2/ (H) est une hyperbole de foyer F et de directrice associée Δ et (P) une une parabole de foyer F et de directrice Δ.

(H) et (P) ont deux point d'intersections. ☐

3/ (H) est une hyperbole équilatère alors l'excentricité de (H) est $\sqrt{2}$. ☐

Exercice 2 *(6 points)*

Dans le plan orienté on considère le carré direct AKJI de centre O et on désigne par C et B les symétrique de A respectivement par rapport à I et K.

1) faire la figure.

2) On pose $f = h_{(A,2)} \circ t_{\overrightarrow{IA}}$

Déterminer f(C) puis caractériser f.

3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en I et B en J.

a- Déterminer les images par g des droites : (KJ) et (BJ).

b- En déduire que g(J)=O.

4)a- Montrer que g admet un centre qu'on notera Ω.

b- Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés : (O,4) et (B,-1) puis construire Ω.

5) On désigne par Δ la médiatrice de [AI], on pose : $\Psi = h_{(A,-2)} \circ S_{\Delta}$

a- Montrer que $\Psi = f \circ S_{(AI)}$

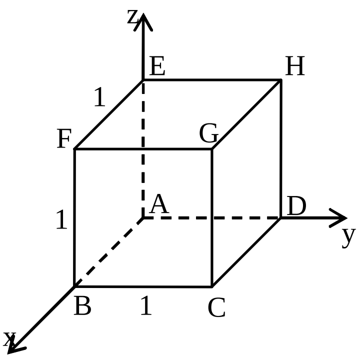
b- Donner la nature et les éléments caractéristiques de Ψ.

Exercice 2 QCM

1/ (**d'après bac Tn 2008 section Sciences expérimentales**)

ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



a- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}$ est égal à :

P_1) 0 P_2) $\sqrt{2}$ P_3) $\sqrt{3}$.

b- Une équation du plan (ECG) est :

P_1) $x + y - 2 = 0$ P_2) $x + y - 1 = 0$ P_3) $x - y = 0$

c- On désigne par I le milieu du segment $[EG]$.

Soit S la sphère de centre I et passant par F. Alors on a :

P_1) Le plan (BEG) est tangent à la sphère S.

P_2) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle de (BEG) de diamètre $[EG]$.

P_3) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle circonscrit au triangle EGH.

2/ α *est réel*, f_α: M$(x,y,z) \mapsto M'(x',y',z')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{1+\alpha^2}{2+\alpha^2}x - 5 \\ y' = \frac{1+\alpha^2}{2+\alpha^2}y + 7 \\ z' = \frac{1+\alpha^2}{2+\alpha^2}z - 6 \end{cases}$

La nature de f_α est :

P_1 : *translation* $\qquad$ P_2 : *homothétie* $\qquad$ P_3 : *dépond* de α

3/ Soit l'ensemble E : $\begin{cases} x = 1 + 2\ln(t) \\ y = -3 - 5\ln(t) \\ z = -3 + \ln(t^7) \end{cases}$; t $\in IR_+^*$ est

P_1 : *plan* $\qquad$ P_2 : *demi* droite $\qquad$ P_3 : *droite*

▸ Exercice 3 ◂ Bac Tn 2008

L'espace est muni d'un repère ortonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points A$\left(1,\ -4,\ 0\right)$, $B\left(4,-1,\ 3\right)$, $C(4,-4,-3)$ et $D\left(-2,\ 2,-3\right)$.

1/**a**) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2/ Calculer l'aire du triangle ABC.

3/ Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

4/**a**) Vérifier que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 27.

b) Calculer l'aire du triangle BCD.

c) En déduire la distance du point A au plan (BCD).

▸ Exercice 4 ◂ *Bac Tn 2008 section math*

L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère le tétraèdre $ABCE$ tel que $A(1,0,2)$, $B(0,0,1)$, $C(0,-1,3)$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1/**a**- Vérifier que E a pour coordonnées $(0,2,3)$.

b- Calculer le volume du tétraèdre $ABCE$.

2/**a**- Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation : $x - 2y - z + 5 = 0$. Montrer que $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).

b- Soit K le point défini par $2\,\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{O}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan $\mathcal{P}$.

3/ Soit h l'homothétie de l'espace de centre E qui transforme le point C en K.

a- Déterminer le rapport de h.

b- Le plan $\mathcal{P}$ coupe les arrêtes $[AE]$ et $[EB]$ respectivement en I et J. Calculer le volume du tétraèdre $EIJK$.

▸ Exercice 5 ◂ *Bac Tn 2008*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère le les points $A(3,2,6)$, $B(1,2,4)$ *et* $C(4,-2,5)$.

1/**a**- Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b- En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

c- Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

2/ Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). $Mq\ OH = \frac{4}{3}$.

3/ Soit S *la* sphère de centre O et passant par A.

a- Justifier que l'intersection de S avec le plan $(ABC) est$ un cercle $\mathcal{C}$ de centre H.

b- Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

▸ *Exercice 6* ◂

Soit l'ensemble $S\ :\ x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$

1/ /Mq S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon r.

2/ Soit le point $A(1,0,2)$. Mq tout plan P contenant A est sécant à S

3/a- Determiner le plan Q passant par A et perpendiculaire à (IA).

b- Caractériser $S\cap Q$.

4/ Determiner les plans P parallèle à Q et tangent à S.

5/ Soit la famille des plan $P_m\ :\ x+my+1=0; m\in IR$

a- Discuter suivant m l'intersection de P_m et S.

b- Déterminer les plans P_m qui coupent S en un cercle de P_m de rayon $\sqrt{23}$.

▸ *Exercice7* ◂ *(6 points)*

L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $R=\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit les points A$(3,0,4)$ et B$(0,5,0)$ et le plan P=(OAB).

1/ Montrer que OAB est un triangle isocèle.

2/ Montrer que P : $-4x+3z=0$. (la vérification des poionts n'est pas acceptable)

3/ Déterminer O_1, A_1 et B_1 les images respectives de O, A et B par la translation T de vecteur $\vec{u}=3\vec{i}$.

4/ Soit I$(a,0,0)$ avec a $\succ 3$. Posons $\{A'\}=(IA)\cap(O_1A_1)$ et $\{B'\}=(IB)\cap(O_1B_1)$.

Désignons par h l'homothétie de centre I et qui transforme O en O_1.

a- Prouver que h$(A)=A'$

b- Montrer que $O_1A'B'$ est un triangle isocèle.

c- Exprimer en fonction de a le rapport de h.

d- Exprimer en fonction de a le volume V du solide $OABO_1A'B'$.

▸ *Exercice 8* ◂ Bac (légèrement modifié)

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

On donne les points A(1 ; 1 ; 0) ; B(3 ; 2 ; 1) ; C(-1 ; 0 ; 1).

1/a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. En déduire le volume du tétraèdre OABC.

b- Vérifier que P=(ABC) : $x-2y+1=0$.

2/ Soit le plan Q: $3x-6y+z-8=0$.

a- Montrer que P et Q sont sécants suivant une droite D.

b- Déterminer les points M de D de coordonnées appartenant à $\mathbb{Z}$ et tels que $OM\leqslant 19$.

2/ Soit (S) la sphère de centre I(2,-1,3) et de rayon $\sqrt{14}$.

a- Vérifier que le tétraèdre OABC est inscrit dans la spère (S).

b- Déterminer le centre Ω et le rayon r du cercle (C) cisconscrit au triangle ABC.

3/a- Donner le centre et le rayon de la sphère (S')=$h_{(A,-3)}((S))$.

b- En déduire que P$\cap(S')$ est un cercle.

▸ *Exercice 9* ◂ *Bac France 2002* *(c)*

1/ On considère l'équation $(E)\ :\ 6x+7y=57$ où x et y sont des entiers.

a- Déterminer un couple d'entiers (u,v) tel que $6u+7v=1$; en déduire une solution particulière (x_0,y_0) de l'équation (E).

b- Déterminer les couples d'entiers solutions de (E).

2/ Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace . On considère le plan (P) d'équation $6x+7y+8z=57.$ On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan de *repère* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels; déterminer les coordonnées de ce point.

3/ On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a- Montrer que l'entier y est impair.

b- On pose $y=2p+1$ où p est un entier naturel.
Montrer que le reste de la division euclidienne de $p+z$ par 3 est égal à 1

c- On pose $p+z=3q+1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x,p et q vérifient la relation $x+p+4q=7.$ En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d- En déduire les coordonnées de touts les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels.

EXERCICE:2 (6pts)

1/a)quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11

b) quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5

c) en déduire que $6^{40}-1\equiv 0(11)$ et $6^{40}\equiv 1(5)$

d) déduire que 6^{40} - 1 est divisible par 55

2/ dans cette question x et y désignent des entiers relatifs

a) montrer que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution

b) montrer que l'équation (E ') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution

c) déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de (E')

d) résoudre (E ')

prouver qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0\equiv 1(40)$

trouver cet entier

3) pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17}\equiv b(55)$ et si $a^{40}\equiv 1(55)$ alors $b^{33}\equiv a(55)$