L. B. Monastir	Série n : 57	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre : Coniques + ...		

Exercice 1 bac Tn 2009-s principale- s. Math

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'ellipse (E) : $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos\theta, 2\sin\theta)$, où θ est réel de $]0\,,\frac{\pi}{2}[$.

1) **a**) Déterminer, par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de (E).

b) Tracer (E) et placer ses foyers.

c) Vérifier que le point M appartient à (E).

2) Soit (T) la tangente à (E) en M. Montrer qu'une équation de (T) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $2x\cos\theta+y\sin\theta-2=0$.

3) On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle OPQ.

a) Montrer que $\mathcal{A}=\frac{2}{\sin 2\theta}$.

b) En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [PQ].

Exercice 2 bac (légèrement modifié)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$(unité graphique 1 cm)

Soit l'ensemble $\mathcal{C}=\left\{M_\theta\left(\frac{1}{\cos\theta};\ \tan\theta\right);\ \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\right\}$

1/**a**- Montrer que tout point de $\mathcal{C}$ appartient à la courbe $(\mathbf{H})$: $x^2-y^2=1$.

On **admet** que $\mathcal{C}=(\mathbf{H})$.

b- On déduire la nature de $\mathcal{C}$. Préciser son centre, ses sommets, ses foyers F et F' et ses asymptotes.

c- Construire $\mathcal{C}$ et sa tangente $T_{\frac{\pi}{4}}$ au point $M_{\frac{\pi}{4}}$.

2/ Montrer qu'une équation cartésienne de la tangente T_θ au point M_θ est :

$x-y\sin\theta-\cos\theta=0$.

3/ Soit K et K' les projections orthogonales respectives des foyers F et F' sur la tangente T_θ.

Calculer FK et F'K' en fonction de θ et varifier que $FK.F'K'=1$.

Exercice 3

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct R=$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $\Gamma=\{M(z)\in P\ /\ \frac{7}{4}z^2+\frac{25}{2}z\bar{z}+\frac{7}{4}\bar{z}^2-144=0\}$.

1/**a**- Montrer que $M(z)\in\Gamma\Leftrightarrow 4(z+\bar{z})^2-\frac{9}{4}(z-\bar{z})^2=144$

b- Donner donc une équation cartésienne de Γ.

2/**a**- Déterminer la nature et les élémens caractéristiques de Γ.

b- Tracer Γ.

3/ Soit F le foyer d'ordonnées positif de Γ et $I(x_0,y_0)$ un point du cercle ζ de centre O et de rayon 4.

a- Déterminer une équation cartésienne de T la droite perpendiculaire à (FI) en I.

b- Vérifier que T est une tangente à Γ et préciser les coordonnées du point M de contact de Γ et T en fonction de x_0 et y_0.

4/**a**- Donner la transformée complexe de la similitude directe S de centre O,de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{-\pi}{4}$.

b- Soit $\Gamma' = S(\Gamma)$. Prouver que Γ' est une ellipse.

c- Donner une équation cartésienne de Γ'.

Exercice 4

$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé de plan P. Soit f l'application de P dans P qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MH}$ avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

1/ Soit M(x,y) un point du plan d'image M'(x',y'). Exprimer x et y en fonction de x' et y'.

2/ Soit ζ le cercle de centre O et rayon 1. Posons $\Gamma = f(\zeta)$.

a- Donner une équation cartésienne de Γ.

b- Déterminer la nature de Γ et préciser ses éléments caratéristiques (on désignera par F le foyer d'abscisse positif).

c- Tracer Γ.

3/ Soit le point G$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

a- Donner une équation cartésienne de la droite T contenant les points M(x,y) vérifiant $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GF} = 0$.

b- Prouver que T est une tangente à Γ.

c- Tracer T puis construiser le point de contact de Γ et T.

Exercice 5 ....

Le plan est muni d'un repère orthonormé $R = \left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soient m est un paramètre réel et l'ensemble

$(E_m) : (2+m)x^2 + (1-m)y^2 - 8 = 0$

1/ Déterminer la nature de (E_0), préciser ses sommets puis le construire .

2/ Soit l'ensemble $(H) : 8x^2 - 4y^2 - 32 = 0$.

a- Déterminer et caractériser (H).

b- Construire sur le même graphique l'ensemble (H).

3/ Soit $(\Gamma) : \frac{x^2}{4} + \frac{y|y|}{8} = 1$. Expliquer puis construire (Γ).

4/ Soit le point $I(0,4)$. Déterminer les tangentes à (E_0) issus de I.

5/ Discuter suivant m la nature de (E_m).

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. On considère l'application f de P dans P qui a tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que $x' = \frac{1}{2}(x+y) - 1$ et $y' = \frac{1}{2}(x-y)$

1/ Mq f admet un seul point invariant que l'on déterminera.

2/ Soit z l'affixe de M et z' celui de M'.

a) Mq $z' = \frac{1+i}{2}\bar{z} - 1$. b) Mq f est une similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Donner la forme réduite de f.

3/ Soit Γ la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y - 8 = 0$.

a- On pose $\Gamma' = f(\Gamma)$. Donner une équation cartésienne de Γ'.

b- En déduire que Γ' est une parabole dont on précisera le sommet ,le foyer F' et la directrice D'.

4/ On pose $F = f^{-1}(F')$ et $D = f^{-1}(D')$. Montrer alors que Γ est une parabole de foyer F et de directrice D.