L. B. Monastir	**Série n : 85**	$4^{ème}$ **Math**
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :

Chapitre : Espace + arithmétique + équation différentielle + …

Exercice 1 d'après un devoir

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé R.

On considère les points A(0 ,0 ,1) ; B(1 , 0 , 1) , C (2 , 1, -1) et I (-2 , 1 , 2)

1/a- Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b- En déduire que A , B et C déterminent un plan P dont on déterminera une équation cartésienne

c- Calculer l'aire du triangle BCA

d- Déterminer la distance du point C au droite (AB)

2/a- Montrer que IABC est un tétraèdre

b- Déterminer le volume V du tétraèdre IABC

c- En déduire de ce qui précède la distance de I à P

3/ Soit S la sphère de centre I et passant par A .

Montrer que S et P sont sécants suivants un cercle $(\mathcal{C})$ que l'on caractériser

4/ On désigne par h l'homothétie de centre I et de rapport k$=\frac{1}{5}$

a- Déterminer l'expression analytique de h

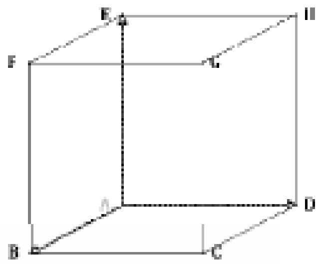
b- Déterminer S'=h(S)

c- Déterminer A'=h(A) puis en déduire P'=h(P).

d- Montrer que P'∩S' est un cercle $(\mathcal{C}')$dont on précisera le centre et le rayon

Exercice n° 3 : (4 points)

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 . On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[CD]$.



1) a) Montrer que $\overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EJ}$ .En déduire que le plan $P = (BIG)$ a pour équation : $x + 2y - 2z - 1 = 0$.

b) Calculer le volume du tétraèdre $EIBG$.

c) La droite (EJ) coupe P en un point L . Déterminer les coordonnées de L .

d) Montrer que les plans P et (EFG) sont sécants suivant une droite dont on déterminera une représentation paramétrique .

2) Soit h l'homothétie de centre E et de rapport 2 . Calculer le volume du tétraèdre image de $EIBG$ par h .

3) Soit S la sphère de centre E et passant par B et S' l'image de S par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) Montrer que S et P se coupent suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon .

b) Montrer que S et S' se coupent suivant un cercle $(\mathcal{C}')$dont on précisera le centre et le rayon .

c) Donner les équations cartésiennes des plans P_1 et P_2 parallèles à P et tangents à S .

EXERCICE N° 5 (6 points)

1/ Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2}{x}$. On note (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Etudier les variations de f. En déduire que $\forall x \in]1,+\infty[$, $f(x) > 0$ puis tracer la courbe (C_f)

b) Soit $\alpha \in]1,2[$. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations : $y = 0$, $x = \alpha$ et $x = 2$. Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 1^+} \mathcal{A}(\alpha)$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$. Soit l'équation différentielle (E_n) : $ny' - y = \frac{x+1}{n+1}$

a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $ny' - y = 0$

b) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $h: x \mapsto ax + b$ soit une solution de (E_n)

c) Montrer qu'une fonction g est une solution de l'équation (E_n) si et seulement si $(g - h)$ est une solution de (E) . Donner la solution g de (E_n) tel que : $g(n) = e - 1 - \frac{n}{n+1}$

3/ On pose $f_n(x) = x - n ln(1 + \frac{x}{n+1})$, $\forall x \in]-n-1, +\infty[$

a) Dresser le tableau de variation de f_n et vérifier que $f_n(-2) = nf(n)$

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans [-2,-1] une unique solution α_n. Montrer que $g(\alpha_n) = 0$

c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^3 \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} e^{tx} dt = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$

d) On pose $F(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} e^{tx} dt$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall x < 0$ on a : $\frac{e^x}{6} \leq F(x) \leq \frac{1}{6}$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$

e) Vérifier que : $e^{\frac{\alpha_n}{n}} = 1 + \frac{\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_n^2}{2n^2} + \frac{\alpha_n^3}{n^3} F(\frac{\alpha_n}{n})$. En déduire que $\alpha_n = -\frac{2n}{(n+1)} - \frac{2\alpha_n^2}{n} F(\frac{\alpha_n}{n})$

f) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2\alpha_n^2}{n} F\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = 0$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = -2$

Exercice 4 De mon livre : ELMOUFID 4ème Math- Tome 1

Soit f une fonction définie et continue sur IR et vérifie pour tout réel x :

$$f(x) = -x + 2 + \int_0^{3x} f\left(\frac{1}{3}t\right) dt.$$

1/ Calculer f(0).

2/ Montrer que f est dérivable sur IR puis montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 3y - 1$.

3/ Expliciter donc f(x); $\forall x \in IR$.

Exercice 5 De mon livre : ELMOUFID 4ème Math- Tome 1

On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y'(x) = y^2(x) - y(x)$$

1/ Vérifier que $f : x \mapsto 1 - \frac{e^x}{e^x + 1}$ est une solution particulière de (E).

2/ Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'(x) = y(x) - 1$

3/**a**- Soit y une fonction dérivable sur IR et qui ne s'annule pas sur IR.

Montrer que : y est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{y}$ est solution de (E_0)

b- Résoudre alors (E).

4/ L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit C=$\left\{M(x,y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 1\right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume V de S.

Exercice 6 De mon livre : ELMOUFID 4ème Math- Tome 1

On désigne par f une fonction deux fois déivable sur IR et qui vérifie les conditions suivantes : (1) : $f(1) \geqslant 0$ (2) : $f'(1) = 4$.

(3) : f est une solution de l'"équation différentielle (E) : $(y'(x))^2 - y^2(x) = 7$

1/ Montrer que $f(1) = 3$

2/**a**- Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) \neq 0$.

b- Démontrer que pour tout réel x, $f''(x) = f(x)$

3/**a**- Résoudre les équation différentielles (E_1) : $y' = y$ et (E_2) : $y' = -y$.

b- Vérifier que $(f'+f)' = f'+f$ et $(f'-f)' = -f'+f$

c- Expliciter enfin f(x); $\forall x \in IR$

▸ *Exercice 7* ◂(3,5 points) temps max. : 45 minutes

1/ Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ 44x+35y = 17$

a- Trouver deux entiers u et v tels que $44x+35y = 1$ (0,5)

b- Déduire une solution particulière de (E). (0,25)

c- Résoudre alors (E). (0,5)

2/ Soit la suite d'entiers (u_n) définie sur IN par : $u_n = 8^n + 6^{2n+1}$

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \equiv 0\quad [7]$ (0,75)

b- Montrer que $\forall n \in IN^*;\ 2^{2n+1}$ divise u_n. (0,5)

3/ Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E')\ :\ 11u_1x - u_2y = 3808$. (1)

Exe-2-(4 points)

Pour tout entier naturel n on pose $a_n = 2\times10^n + 1$.

1/

a- Montrer que pour tout entier naturel n a_n est divisible par 3

b- Discuter suivant n le reste de la division euclidienne de a_n par 11.

c- En déduire que pour tout n a_n et 11 sont premiers entre eux

2/ On considère dans ZxZ l'équation (E) : $a_2x + 11y = 1$

a- Justifier que (E) admet au moins une solution

b- Résoudre alors (E) dans ZxZ

3/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le point A_n d'affixe $z_n = 2e^{i\pi\frac{a_n}{4}}$

a- Montrer que pour tout n de IN , A_n appartient à un cercle fixe que l'on précisera

b- Montrer que pour tout n non nul on a $A_n \in \{A_1, A_2\}$

Exercice n° 4 :(4 points)

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par : $a_0 = 3$ et $a_{n+1} = 2a_n - 1$, $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = 2b_n + 3$

1) Montrer que pour tout entier naturel n , $a_n = 2^{n+1} + 1$.

2) a) Calculer le $PGCD$ de a_3 et a_4 puis celui de a_{2010} et a_{2011} .

b) a_n et a_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $2a_n - b_n = 5$ puis exprimer b_n en fonction de n .

b) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5 .

c) On note d_n le $PGCD$ de a_n et b_n . Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = 1$ ou $d_n = 5$.

En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $PGCD(a_n, b_n) = 1$.

Exercice 10 (bac)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $35u - 96v = 1$.

1/ Vérifier que le couple (11, 4) est une solution de (E).

2/ Résoudre (E).

3/ On considère dans IN l'équation (F) : $x^{35} \equiv 2$ (mod 97).

a- Soit x une solution de (F).

i) Prouver que 97 est un nombre premier et que x et 97 sont premiers entre eux.

ii) Montrer que $x^{96} \equiv 1$ (mod 97) et $x \equiv 2^{11}$ (mod 97)

b- Soit x un entier naturel. Montrer que si $x \equiv 2^{11}$ (mod 97) alors x est solution de (F).

c- Montrer que l'ensemble des solutions de de (F) est l'ensemble des entiers naturels de la forme 11+97k avec k $\in$ IN.

Exercice 11 (exercice 8 page 201)

1/ Vérifier que la fonction u : $x \mapsto 2$ est une solution de l'équation différentielle $y'+2y=y^2$.

2/ Soit E l'ensemble des fonction f dérivables sur IR, qui ne s'annule pas sur IR, telles que $f'(x)+2f(x)=(f(x))^2$ pour tout réel x

a- Vérifier que l'ensemble E est non vide.

b- Soit f une fonction de E. Montrer que $g=\frac{1}{f}$ est une solution d'une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$ où a et b sont deux réelles.

c- Déterminer alors E.

Exercice 12 (exercice 22 page 203)

On se propose de déterminer les fonctions continues sur IR et vérifiant l'équation (E) : $\forall x \in IR,\ f(x) = x + \int_0^x f(t)dt$.

1/ Montrer que si une fonction f vérifie (E) alors f est dérivable sur IR.

2/ Montrer que toute solution de (E) est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = y + 1$.

Réciproquement, quelle condition doit vérifier une solution de (E') pour être une solution de (E)

3/ Résoudre (E).

Exercice 5

1. On considère l'équation (E_1) :
$$6x - 5y = 7$$
dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.
   (a) On suppose que le couple d'entiers (x, y) vérifie $6x - 5y = 7$. Démontrer que $x \equiv 2\ [5]$
   (b) En déduire tous les couples d'entiers, solutions de l'équation (E_1).

2. *Application* : dans le plan muni d'un repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$, on note Δ la droite d'équation
$$6x - 5y = 7$$
Déterminer le nombre de points de Δ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est inférieure à 500.

3. On considère à présent l'équation (E_2) :
$$6x^2 - 5y^2 = 7$$
dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Vérifier que si le couple $(x\,;y)$ est solution de (E_2), alors
$$x^2 \equiv 2 \quad [5]$$
   (b) Démontrer que, pour tout entier α, α^2 est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.
   (c) Quel est l'ensemble solution de l'équation (E_2) ?