| L. B. Monastir | **Série n : 59** | $4^{ème}$ Math |
|---|---|---|
| P.P. : Ali Zouhaïer | | Séance n : |
| Chapitre : Arithmétique + Equation différentielle + … | | |

Exercice 1 D'après un devoir

**I)**

**1/** Déterminer les restes de la division euclidienne de $4^n$ par $9$ pour n entier naturel.

**2/** Soit le nombre $A = (3n-1)4^n + 1$.

**a**- Vérifier que pour tout $n = 3q$, le nombre $A$ est divisible par $9$.

**b**- Démontrer que pour tout entier naturel $n$, le nombre $A$ est divisible par $9$.

**II)**

**1/** On considère l'équation $(E)$ : $8x + 5y = 1$ où $(x, y)$ est un couple d'entiers relatifs.

**a**- Donner une solution particulière de $(E)$.

**b**- Résoudre $(E)$.

**2/** Soit $N$ un entier tel que $\begin{cases} N \equiv 1 \ [8] \\ N \equiv 2 \ [5] \end{cases}$

Démontrer que $N \equiv 17 \ [40]$

**3/** On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'equation $(E')$ : $8x + 25y = 5$.

**a**- Démontrer que si $(x, y)$ est une solution de $(E')$ alors $x \equiv 0 \ [5]$

**b**- Résoudre alors $(E')$.

**4/a**- Soit $d = x \wedge y$ où $(x, y)$ est solution de $(E')$, déterminer les valeurs de $d$.

**b**- Déterminer l'ensemble des solutions de $(E')$ dont le $p\gcd$ est 5.

Exe-2-( 4 points)

Pour tout entier naturel n on pose $a_n = 2\times10^n + 1$.

1/

a- Montrer que pour tout entier naturel n $a_n$ est divisible par 3

b- Discuter suivant n le reste de la division euclidienne de $a_n$ par 11.

c- En déduire que pour tout n $a_n$ et 11 sont premiers entre eux

2/ On considère dans ZxZ l'équation (E) : $a_2x + 11y = 1$

a- Justifier que (E) admet au moins une solution

b- Résoudre alors (E) dans ZxZ

3/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le point $A_n$ d'affixe $z_n = 2e^{i\pi\frac{a_n}{4}}$

a- Montrer que pour tout n de $IN$, $A_n$ appartient à un cercle fixe que l'on précisera

b- Montrer que pour tout n non nul on a $A_n \in \{A_1, A_2\}$

▸ *Exercice 3* ◂ ( 3,5 points ) temps max. : 45 minutes

**1/** Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E)$ : $44x + 35y = 17$

**a**- Trouver deux entiers u et v tels que $44x + 35y = 1$ $(0,5)$

**b**- Déduire une solution particulière de $(E)$. (0,25)

**c**- Résoudre alors $(E)$. (0,5)

**2/** Soit la suite d'entiers $(u_n)$ définie sur IN par : $u_n = 8^n + 6^{2n+1}$

**a**- Montrer que $\forall n \in IN$; $u_n \equiv 0 \ [7]$ (0,75)

**b**- Montrer que $\forall n \in IN^*$; $2^{2n+1}$ divise $u_n$. (0,5)

**3/** Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E')$ : $11u_1x - u_2y = 3808$. (1)

## Exercice 5

1. On considère l'équation $(E_1)$ :

$$6x - 5y = 7$$

dont les inconnues $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

(a) On suppose que le couple d'entiers $(x, y)$ vérifie $6x - 5y = 7$. Démontrer que $x \equiv 2$ [5]

(b) En déduire tous les couples d'entiers, solutions de l'équation $(E_1)$.

2. *Application* : dans le plan muni d'un repère $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$, on note $\Delta$ la droite d'équation

$$6x - 5y = 7$$

Déterminer le nombre de points de $\Delta$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est inférieure à 500.

3. On considère à présent l'équation $(E_2)$ :

$$6x^2 - 5y^2 = 7$$

dont les inconnues $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

(a) Vérifier que si le couple $(x\,;y)$ est solution de $(E_2)$, alors

$$x^2 \equiv 2 \quad [5]$$

(b) Démontrer que, pour tout entier $\alpha$, $\alpha^2$ est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.

(c) Quel est l'ensemble solution de l'équation $(E_2)$ ?

## *Exercice 5* (exercice 8 page 201)

**1**/ Vérifier que la fonction u : $x \mapsto 2$ est une solution de l'équation différentielle $y' + 2y = y^2$.

**2**/ Soit E l'ensemble des fonction f dérivables sur IR, qui ne s'annule pas sur IR, telles que $f'(x) + 2f(x) = (f(x))^2$ pour tout réel x

**a**- Vérifier que l'ensemble E est non vide.

**b**- Soit f une fonction de E. Montrer que $g = \frac{1}{f}$ est une solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ où a et b sont deux réelles.

**c**- Déterminer alors E.

## *Exercice 6* (exercice 22 page 203)

On se propose de déterminer les fonctions continues sur IR et vérifiant l'équation $(E)$ : $\forall x \in IR,\ f(x) = x + \int_0^x f(t)dt.$

**1**/ Montrer que si une fonction f vérifie $(E)$ alors f est dérivable sur IR.

**2**/ Montrer que toute solution de $(E)$ est solution de l'équation différentielle

$(E')$ : $y' = y + 1$.
Réciproquement, quelle condition doit vérifier une solution de $(E')$ pour être une solution de $(E)$

**3**/ Résoudre $(E)$.

## *Exercice 7* bac

On désigne par f une fonction déivable sur IR et par f' sa fonction dérivée.
Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

$(1)$ : pour tout réel x, $f^2(x) = (f')^2(x) - 4$.

$(2)$ : $f'(0) = 1$.

$(3)$ : la fonction f' est dérivable sur IR.

**1**/**a**- Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) \neq 0$.

**b**- Calculer f$(0)$.

**2**/ Démontrer que pour tout réel x, $f''(x) = f(x)$ où f" désigne la dérivée seconde de la fonction f.

**3**/**a**- Vérifier que $(f' + f)' = f' + f$ et $(f' - f)' = -f' + f$

**b**- Résoudre les équation différentielles $(E)$ : $y' = y$ et $(E')$ : $y' = -y$.

**c**- En déduire que pour tout réel x , $f(x) = e^x - e^{-x}$.

## *Exercice 8*

Soit l'équation différentielle $(E)$ : $y''(x) + 4y(x) = x$.

**1**/ Vérifier que la fonction f : x $\mapsto \frac{1}{4}x$ est une solution particulière de $(E)$.

**2**/ Résoudre l'équation différentielle $(E_0)$ : $y''(x) + 4y(x) = 0$

**3**/ Soit z$(x) = y(x) - f(x)$.
Montrer que $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si z est solution de $(E_0)$.

**4**/ Résoudre enfin l'équation différentielle $(E)$.

**5**/ Soit h la solution de $(E)$ qui s'annule en 0 et telle que $\int_0^\pi h(x)dx = 1$.
Exprimer h$(x)$ en fonction de x.

## *Exercice 9* bac

Soit l'équation différentielle $(E)$ : $y''(x) + 4y(x) = 3\sin(x)$ (1)
On pose $y(x) = u(x) + \alpha \sin x$ où u est une nouvelle fonction inconnue et $\alpha$ une constante réelle.

**1**/ Pour quelle valeur de $\alpha$ la fonction u vérifie-t-elle l'équation différentielle $u''(x) + 4u(x) = 0$ , (2) lorsque $y$ vérifie (1) ?

**2**/**a**) Résoudre l'équation différentielle (2).

**b**) En déduire toutes les solutions de (1).

**3**/ Montrer qu'il n'existe qu'une solution de (1) vérifiant les conditions :
$y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(\pi) = 0$. Déterminer cette solution.

## *Exercice 10* (exercice 27 page 205)

Soit g la fonction définie sur IR par g$(x) = \cos(x) - \sin(x)$.

**1**/ Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = g(\pi - x)$.

**2**/ On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur IR vérifiant pour tout x réel, $f'(x) = f(\pi - x)$.

**a**- Montrer que f est deux fois dérivables et que f est une solution de l'équation différentielle y"+y=0.

**b**- Déterminer les fonctions f.

---

***EXERCICE N 3 :( 7 points)***

1/ On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=e^{-x}$.

a) Démontrer que la fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=xe^{-x}$ est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle $(E_0)$ : $y'+y=0$.

c) Démontrer qu'une fonction $y$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $y-u$ est solution de $(E_0)$.

d) En déduire toutes les solutions de (E).

2/ $k$ étant un réel donné, on note $f_k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x)=(x+k)e^{-x}$. Dresser le tableau de variation de $f_k$.

3/ Soit la suite $(I_n)$ définie par $I_0=\int_{-2}^{0}e^{-x}dx$ et $\forall n\in\mathbb{N}$: $I_n=\int_{-2}^{0}x^n e^{-x}dx$

a) Calculer $I_0$.

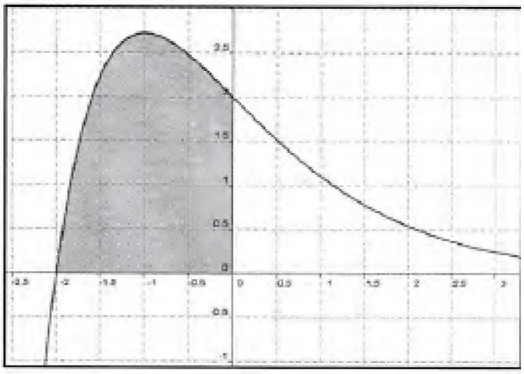
b) En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

$I_{n+1}=(-2)^{n+1}e^2+(n+1)I_n$. En déduire $I_1$ et $I_2$.

4/ Le graphique représente une courbe $C_k$ d'une fonction $f_k$, dans un repère orthonormé, définie à la 2/ question .

a) À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel $k$ correspondant.

b) Soit $S$ l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer $S$ en fonction de $I_1$ et $I_0$ et en déduire sa valeur exacte.



## *Exercice 12 d'après un devoir*

**Partie A**

Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ y'-3y=\dfrac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$.

On donne une fonction $\varphi$ dérivable sur IR et la fonction f définie sur IR par :

$f(x)=e^{-3x}\varphi(x)$ ; $\forall x\in IR$

**1**/ Montrer que f est dérivable sur IR et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x)-3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.

**2**/ Déterminer f de sorte que $\varphi$ soit solution $(E)$ et $\varphi(0)=\dfrac{e}{2}$.

**Partie B**

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\dfrac{e^{(1-3x)}}{1+e^{-3x}}$. On désigne par $C_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unité graphique 2 cm.

**1**/ Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f.

**2**/ Tracer $C_f$.

**3**/ Pour $\alpha$ réel non nul, on pose $I_\alpha=\int_0^\alpha f(x)dx$.

**a**- donner le signe et une interprétation graphique de $I_\alpha$ en fonction de $\alpha$.

**b**- Exprimer $I_\alpha$ en fonction de $\alpha$.

**c**- Déterminer la limte de $I_\alpha$ lorsque $\alpha$ tend vers $+\infty$.

**Partie C**

On définit sur IN* la suite u par $u_n=\int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}dx$.

**1**/**a**- Donner pour tout n de IN* le signe de $u_n$.

**b**- Donner le sens de variation de la suite u.

**c**- La suite u est-elle convergente?

**2**/**a**- Montrer que pour tout n de IN*, $I_1\leqslant u_n\leqslant e^{\frac{1}{n}}I_1$.

**b**- En déduire la limite de la suite u et donner sa valeur exacte.