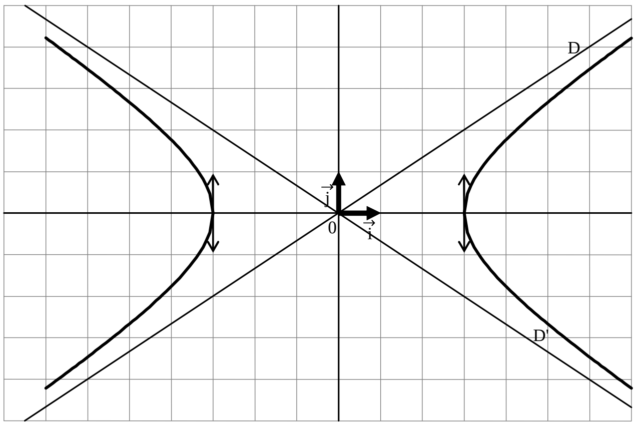
L. B. Monastir	Série n : 60	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :
Chapitre : Arithmétique + Espace + conique + …		

Exercice 1 ♦

On donne le graphique ci dessous une hyperbole (H).



1/**a**- Donner une équation cartésienne de de chacune des asymptotes D et D' de (H).

b- Donner une équation cartésienne de (H).

2/ Construire $(H')\ :\ -\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

3/ Calculer l'aire du quadrilatère FGF'G' avec F et F' les foyers de (H) et G et G' celui de (H').

Exercice 2 ♦

Le plan est muni d'un repère orthonormé R=$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit l'hyperbole $(H)\ :\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

1/ Déterminer $T\cap(H)$ avec $T\ :\ y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$.

2/ T est -elle tangente à (H)?

3/ Soit le point I$(2;3)$. Déterminer les tangentes à (H) passant par I.

4/ Désignons par Δ et Δ' les asymptotes de (H) avec Δ celle qui contient des points de coordonnées positives.

a- Montrer que $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$ est un vecteur directeur de Δ et $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}$ est un vecteur directeur de Δ'.

b- Ecrire une équation cartésienne de (H) dans le repère R'=$(O,\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 3 *d'après un devoir*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ Soit P l'ensemble des points M(x,y) tel que $x^2-2x-4y+1=0$.

a- Montrer que P est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

b- Soit le point A de P d'abscisse 3. Ecrire une équation de la tangente T à P en A.

c- Tracer P et T.

d- Soit A' le projeté orthogonal de A sur la directrice D. La tangente T coupe l'axe focal de P en B. Montrer que les droites (AF) et $(A'B)$ sont parallèles.

2/ Soit (H) l'hyperbole d'équation $\frac{(x-1)^2}{2}-y^2=1$.

a- Déterminer le centre, le foyer, les sommets et les asymptotes de (H).

b- Montrer que la droite T et tangente à (H) en A.

c- Tracer (H) dans le même repère que P.

d- Soit $\mathcal{A}$ le domaine du plan limité par (H) et les droites x=3 et x=4 et S le solide obtenu par la rotation de $\mathcal{A}$ autour de $\left(O,\vec{i}\right)$. Calculer le volume de S.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $R = \left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

m est un paramètre réel différent de 1. Soit l'ensemble (E_m) d'équation cartésienne $(2+m^2)x^2+(1-m)y^2-8=0$

1/ Construire (E_0).

2/ Soit l'ensemble $(H) : \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}-1=0$.

a- Déterminer et caractériser (H).

b- Construire sur le même graphique l'ensemble (H).

3/ Soit $(\Gamma) : \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y|y|}{8}=1$. Expliquer puis construire (Γ).

4/ Soit le point $I(2,3)$. Déterminer les tangentes à (E_0) issus de I.

5/ Discuter suivant m la nature de (E_m).

Exercice 1 d'après un devoir

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé R.

On considère les points A(0 ,0 ,1) ; B(1 , 0 , 1) , C (2 , 1, -1) et I (-2 , 1 , 2)

1/a- Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

b- En déduire que A , B et C déterminent un plan P dont on déterminera une équation cartésienne

c- Calculer l'aire du triangle BCA

d- Déterminer la distance du point C au droite (AB)

2/a- Montrer que IABC est un tétraèdre

b- Déterminer le volume V du tétraèdre IABC

c- En déduire de ce qui précède la distance de I à P

3/ Soit S la sphère de centre I et passant par A .

Montrer que S et P sont sécants suivants un cercle $(\mathcal{C})$ que l'on caractériser

4/ On désigne par h l'homothétie de centre I et de rapport k=$\frac{1}{5}$

a- Déterminer l'expression analytique de h

b- Déterminer S'=h(S)

c- Déterminer A'=h(A) puis en déduire P'=h(P).

d- Montrer que P'∩S' est un cercle $(\mathcal{C}')$dont on précisera le centre et le rayon

<u>*Exercice n° 3 : (4 points)*</u>

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 . On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[CD]$.

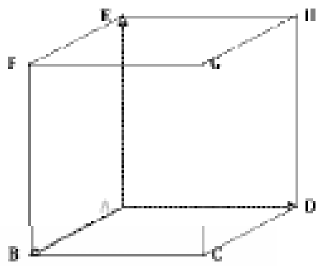
1) a) Montrer que $\overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{EJ}$ .En déduire que le plan $P=(BIG)$ a pour équation : $x+2y-2z-1=0$.

b) Calculer le volume du tétraèdre $EIBG$.

c) La droite (EJ) coupe P en un point L . Déterminer les coordonnées de L .

d) Montrer que les plans P et (EFG) sont sécants suivant une droite dont on déterminera une représentation paramétrique .

2) Soit h l'homothétie de centre E et de rapport 2 . Calculer le volume du



Exercice -6- (7 points) ♦

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

On donne les points A(0 ; -3 ; 0) ; B(2 ; -1 ; 0) ; C(0 ; -1 ; 2) et D$\left(\sqrt{2}, -2, 1\right)$

1/**a**- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b- En déduire le volume du tétraèdre DABC et l'aire du triangle ABC.

c- Déterminer alors d(D, P) avec P le plan contenant A, B et C.

2/ Soit S la sphère de centre I(0,-1,0) et de rayon r$=2$.

a- Vérifier que le tétraèdre DABC est inscrit dans la sphère S.

b- Déduire la position relative de S et P.

b- Déterminer alors le centre Ω et le rayon r du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

3/**a**- Déterminer h$_{(B,-5)}(P)$ avec h$_{(B,-5)}$ l'homothétie de centre B et de rapport (-5)

b- Donner les expressions analytiques de h$_{(B,-5)}$.

b- En déduire la nature et les éléments de $P \cap S'$ avec $S' = h_{(B,-5)}(S)$.

Exercice -7- *bac Tn 2009 (s.p.-Sciences de l'info.)*

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : 2x $+$ 3y $=$ 5.

2) Dans la suite les âges sont exprimés en années.

En 2009, un père, dont l'âge n est compris entre 50 et 55, a deux fils A et B d'âges respectifs a et b. On suppose que :

- en 2001, l'âge du père était le double de l'âge du fils A.
- en 2006, l'âge du père dépassait de trois ans le triple de l'age du fils B.

a) Montrer que n, a et b vérifient $\begin{cases} n = 2a - 8 \\ n = 3b - 3 \end{cases}$

b) Vérifier que (a, - b) est une solution de (E).

c) En déduire les âges n, a et b du père et de ses deux fils.

Exercice 1 D'après un devoir

I)**1**/ Déterminer les restes de la division euclidienne de 4^n par 9 pour n entier naturel.

2/ Soit le nombre $A = (3n-1)4^n + 1$.

a- Vérifier que pour tout $n = 3q$, le nombre A est divisible par 9.

b- Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre A est divisible par 9.

II)**1**/ On considère l'équation $(E)\ :\ 8x + 5y = 1$ où (x,y) est un couple d'entiers relatifs.

a- Donner une solution particulière de (E).

b- Résoudre (E).

2/ Soit N un entier tel que $\begin{cases} N \equiv 1\ [8] \\ N \equiv 2\ [5] \end{cases}$

Démontrer que $N \equiv 17\ [40]$

3/ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'equation $(E')\ :\ 8x + 25y = 5$.

a- Démontrer que si (x,y) est une solution de (E') alors $x \equiv 0\ [5]$

b- Résoudre alors (E').

4/**a**- Soit $d = x \wedge y$ où (x,y) est solution de (E'), déterminer les valeurs de d.

b- Déterminer l'ensemble des solutions de (E') dont le $p\,\mathrm{gcd}$ est 5.

▸ *Exercice 3* ◂ (3,5 points) temps max. : 45 minutes

1/ Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ 44x + 35y = 17$

a- Trouver deux entiers u et v tels que $44x + 35y = 1$ $(0,5)$

b- Déduire une solution particulière de (E). (0,25)

c- Résoudre alors (E). (0,5)

2/ Soit la suite d'entiers (u_n) définie sur IN par : $u_n = 8^n + 6^{2n+1}$

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \equiv 0\ \ [7]$ (0,75)

b- Montrer que $\forall n \in IN^*;\ 2^{2n+1}$ divise u_n. (0,5)

3/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E')\ :\ 11u_1x - u_2y = 3808$. (1)

Exe-2-(4 points)

Pour tout entier naturel n on pose $a_n = 2\times10^n + 1$.

1/

a- Montrer que pour tout entier naturel n a_n est divisible par 3

b- Discuter suivant n le reste de la division euclidienne de a_n par 11.

c- En déduire que pour tout n a_n et 11 sont premiers entre eux

2/ On considère dans ZxZ l'équation (E) : $a_2x + 11y = 1$

a- Justifier que (E) admet au moins une solution

b- Résoudre alors (E) dans ZxZ

3/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le point A_n d'affixe $z_n = 2e^{i\pi\frac{a_n}{4}}$

a- Montrer que pour tout n de IN , A_n appartient à un cercle fixe que l'on précisera

b- Montrer que pour tout n non nul on a $A_n \in \{A_1, A_2\}$

Exercice 5

1. On considère l'équation (E_1) :

$$6x - 5y = 7$$

dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

(a) On suppose que le couple d'entiers (x, y) vérifie $6x - 5y = 7$.
Démontrer que $x \equiv 2\ [5]$

(b) En déduire tous les couples d'entiers, solutions de l'équation (E_1).

2. *Application* : dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note Δ la droite d'équation

$$6x - 5y = 7$$

Déterminer le nombre de points de Δ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est inférieure à 500.

3. On considère à présent l'équation (E_2) :

$$6x^2 - 5y^2 = 7$$

dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

(a) Vérifier que si le couple $(x\,;y)$ est solution de (E_2), alors

$$x^2 \equiv 2 \quad [5]$$

(b) Démontrer que, pour tout entier α, α^2 est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.

(c) Quel est l'ensemble solution de l'équation (E_2) ?