L. B. Monastir	Série n : 63	4 ^{ème} Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre : Statistique + Arithmétique + équation différentielle …		

Exercice 1

Concernant la distance de freinage d'une automobile circulant sur une route humide, on donne l'information suivante :

Vitesse(Km/h)	x_i	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance freinage(**m**)	y_i	29	42	57	75	94	115	150	166	193

1/ Calculer le coefficient de corrélation linéaire de x et y.
Interpréter le résultat trouvé.

2/ Etablir par la méthode des moindres carrés, l'équation de D la droite de régression de y en x.

3/ A l'aide la relation précédente, estimer la vitesse de l'automobile qui a fait 50 mètres de freinage.

4/ On suppose que les réflexes du conducteur répondent après une seconde quand il conduit a une vitesse de 72 Km/h. Estimer dans ce cas la distance pour stopper le véhicule dès qu'il voie le danger.

Exercice 2 bac

Dans cet exercice, les résultats numériques devront être justifiés par le rappel des formules utilisées.
Le tableau suivant donne l'âge X et la tension artérielle Y de 10 hommes.

X	58	40	74	34	65	49	53	51	36	40
Y	16,7	13,1	17,2	11,6	15,5	15,1	14,2	14,4	13,0	14;2

1/ Déterminer la moyenne et la variance de chacune de ces variables.

2/ Déterminer le coefficient de corrélation linéaire des variables X et Y.
Interpréter le résultat.

3/ Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.

4/ Estimer la tension artérielle d'un homme âgé de 45 ans.

Exercice 3 bac

On a mesuré,lors de plusieurs expériences de compression de l'air dans un piston isolé thermiquement,les variations correspondants de pression et de volume (les conditions initiales de pression et de volume et de température étant les mêmes pour toutes ces expériences). Les relèves sont données par le tableau suivant:

Expérience i	1	2	3	4	5	6
Pression p_i(*en atmosphère*)	2	3	5	10	15	20
Volume v_i (en dm^3)	1,5	1,1	1,8	0,5	0,35	0,3

1/a) Construire la série statistique correspondant aux valeurs :

$$\begin{cases} X_i = Log(p_i) \\ Y_i = Log(v_i) \end{cases}$$ (donner les résultats sous formes d'un tableau)

b) Construire le nuage de points représentant cette série (X_i, Y_i).
Unités :2 cm en abscisses 5 cm en ordonnées.

2/ Calculer le coefficient r(X,Y) de corrélation de X et Y. Interpréter la valeur de r(X,Y).

3/ Déterminer l'équation de $D_{Y/x}$, la droite de régression de Y en X. Construire $D_{Y/X}$.

4/a- En utilisant 3/, donner la relation liant p et v .

b- Que devrai être la valeur de v si p=25?

Exercice 4 bac

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur IR vérifiant la condition : (C) : $\begin{cases} f(-x)f(x) = 1;\ \forall x \in IR \\ f(0) = 4 \end{cases}$

1/ On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur IR par g$(x) = f(-x)f(x)$.

a- Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur IR.

b- Calculer la fonction dérivée de la fonction g.

c- En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

d- Montrer que la fonction f vérifie :

$$f' = \frac{1}{16}f \quad \text{et} \quad f(0) = 4$$

2/ Démontrer qu'il existe une seule fonction dérivable sur IR satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

Exercice 5

f est une soution sur IR de l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 1$ telle que y'$(1) = 3$.

1/ Démontrer que si y est solution de (E) alors pour tout réel x, y"(x)=$9y(x) - 3$.

2/ En déduire f"(1) et f(1).

3/ Déterminer la fonction f .

4/ Soit l'équation différentielle (E') : $y' + 3y = e^{3x}$

a- Soit la fonction g$(x) = \varphi(x)e^{3x}$. Montrer que g est solution de (E') si et seulement si φ est solution de (E)

b- Trouver les solutions de (E')

Exercice 6

On se propose de trouver les fonctions f dérivables sur IR et vérifiant la propriété suivantes : $\forall (x,t) \in IR^2$; f $(x + y) = f(x) \times f(y)$.

I]**1**/ Montrer que f$(0) = 0$ ou f$(0) = 1$.

2/ Déterminer f(x) quand f$(0) = 0$.

II] Dans toute cette partie on suppose que f$(0) = 1$ et on pose $f'(0) = a$.

1/ Calculer en fonction de a et du réel x_0 la valeur de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

2/ Déduire que f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$

3/ Trouver alors la forme de f(x).

Exercice 7

Soit l'équation différentielle (E) : $y'(x) - y(-x) = x^2$ pour tout x réel.

1/ Soit l'équation différentielle $y'(x) - y(-x) = 0 \quad (1)$

a) Montrer que si une fonction f, deux fois dérivable, est solution de (1), *alors* f est aussi solution de (2) : $y''(x) + y(x) = 0$

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) Trouver alors l'expression de f(x) solution de (1)

2/**a**) Soit le polynome P:x $\mapsto ax^2 + bx + c$ avec a, b et c sont des réels. déterminer a, b et c pour que P soit une solution de (E).

b) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $(f-P)$ est solution de (1).

c) Résoudre enfin l'équation (E).

Exercice 8 bac

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' - 2y = \dfrac{2}{1+e^{-2x}}$

1/ Déterminer la solution de l'équation y'-2y=0 qui prend la valeur 1 en 0.

2/ Soit f une fonction dérivable sur IR telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie par l'égalité $f(x) = e^{2x}g(x)$.

a- Calculer $g(0)$.

b- Calculer $f'(x)$ en fonction de g'(x) et $g(x)$.

c- Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

d- En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

Exercice -9- *bac Tn 2009 (s.p.-Sciences de l'info.)*

1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : 2x + 3y = 5.

2) Dans la suite les âges sont exprimés en années.

En 2009, un père, dont l'âge n est compris entre 50 et 55, a deux fils A et B d'âges respectifs a et b. On suppose que :

- en 2001, l'âge du père était le double de l'âge du fils A.
- en 2006, l'âge du père dépassait de trois ans le triple de l'age du fils B.

a) Montrer que n, a et b vérifient $\begin{cases} n = 2a - 8 \\ n = 3b - 3 \end{cases}$

b) Vérifier que (a, - b) est une solution de (E).

c) En déduire les âges n, a et b du père et de ses deux fils.

Exercice 10 D'après un devoir

I)**1**/ Déterminer les restes de la division euclidienne de 4^n par 9 pour n entier naturel.

2/ Soit le nombre $A = (3n-1)4^n + 1$.

a- Vérifier que pour tout $n = 3q$, le nombre A est divisible par 9.

b- Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre A est divisible par 9.

II)**1**/ On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$ où (x,y) est un couple d'entiers relatifs.

a- Donner une solution particulière de (E).

b- Résoudre (E).

2/ Soit N un entier tel que $\begin{cases} N \equiv 1 \ [8] \\ N \equiv 2 \ [5] \end{cases}$

Démontrer que $N \equiv 17 \ [40]$

3/ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'equation (E') : $8x + 25y = 5$.

a- Démontrer que si (x,y) est une solution de (E') alors $x \equiv 0 \ [5]$

b- Résoudre alors (E').

4/**a**- Soit $d = x \wedge y$ où (x,y) est solution de (E'), déterminer les valeurs de d.

b- Déterminer l'ensemble des solutions de (E') dont le $p\mathrm{gcd}$ est 5.

▸ Exercice 11 ◂ (3,5 points) temps max. : 45 minutes

1/ Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $44x + 35y = 17$

a- Trouver deux entiers u et v tels que $44x + 35y = 1$ $(0,5)$

b- Déduire une solution particulière de (E). (0,25)

c- Résoudre alors (E). (0,5)

2/ Soit la suite d'entiers (u_n) définie sur IN par : $u_n = 8^n + 6^{2n+1}$

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \equiv 0 \ [7]$ (0,75)

b- Montrer que $\forall n \in IN^*$; 2^{2n+1} divise u_n. (0,5)

3/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E') : $11u_1x - u_2y = 3808$. (1)

Exe-2-(4 points)

Pour tout entier naturel n on pose $a_n = 2\times10^n + 1$.

1/

a- Montrer que pour tout entier naturel n a_n est divisible par 3

b- Discuter suivant n le reste de la division euclidienne de a_n par 11.

c- En déduire que pour tout n a_n et 11 sont premiers entre eux

2/ On considère dans ZxZ l'équation (E) : $a_2x + 11y = 1$

a- Justifier que (E) admet au moins une solution

b- Résoudre alors (E) dans ZxZ

3/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le point A_n d'affixe $z_n = 2e^{i\pi\frac{a_n}{4}}$

a- Montrer que pour tout n de IN , A_n appartient à un cercle fixe que l'on précisera

b- Montrer que pour tout n non nul on a $A_n \in \{A_1 , A_2\}$

Exercice 5

1. On considère l'équation (E_1) :
$$6x - 5y = 7$$
dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.
   (a) On suppose que le couple d'entiers (x, y) vérifie $6x - 5y = 7$. Démontrer que $x \equiv 2$ [5]
   (b) En déduire tous les couples d'entiers, solutions de l'équation (E_1).

2. *Application* : dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note Δ la droite d'équation
$$6x - 5y = 7$$
Déterminer le nombre de points de Δ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est inférieure à 500.

3. On considère à présent l'équation (E_2) :
$$6x^2 - 5y^2 = 7$$
dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Vérifier que si le couple $(x ; y)$ est solution de (E_2), alors
$$x^2 \equiv 2 \quad [5]$$
   (b) Démontrer que, pour tout entier α, α^2 est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.
   (c) Quel est l'ensemble solution de l'équation (E_2) ?