L. B. Monastir	**Série n : 64**	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre : Arithmétique + Probabilité + ...		

EXERCICE (5points)

Pour n entier natirel non nul on pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) a-Vérifier que n est pair pour tout n de IN^*

b- Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $a_n \equiv 0 \ (mod3)$

2) Soit p un nombre premier $p > 3$

a-Montrer que $2^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$; $3^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$ et $6^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$

b-Montrer que a_{p-2} est divisible par p

c-Démontrer que pour tout q premier il existe un entier naturel non nul n tel que : $a_n \wedge q = q$

Exercice n°3 (4 points)

1/ Soit $n \in Z$, on pose $a = 3n + 8$ et $b = n+1$

1) Montrer que $a \wedge b = b \wedge 5$

2) Déterminer les entiers n tels que $a \wedge b = 5$

3) En déduire $(3 \times 101^{2008}+8) \wedge (101^{2008}+1)$

II/ 1) Justifier que l'équation (E) : $65x + 77y = 1$ admet au moins une solution

2) Résoudre dans Z x Z l'équation (E') : $65x + 77y = 5$

3). Déterminer s'ils existent des couples d'entiers naturels solutions de (E')

Exercice 3 : (4 points)

1) Résoudre dans ℤxℤ, l'équation: $7x - 13y = 1 \quad (E)$.

2) On considère dans ℤxℤ, l'équation: $7x - 13y = -4 \quad (E')$.

a) Vérifier que le couple (5,3) est une solution particulière de (E').

b) Résoudre dans ℤxℤ, l'équation (E').

3) Soit dans Z le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 5 \pmod{13} \\ n \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$

a) Montrer que le système (S) est équivaut à (S') : $\begin{cases} 7n \equiv 35 \pmod{91} \\ 13n \equiv 39 \pmod{91} \end{cases}$

b) En déduire qu'un entier n est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv 31 \pmod{91}$.

4) Pour tout entier n, on pose $a = 13n - 8$ et $b = 7n - 4$.

a) Montrer que le couple (a, b) est une solution de l'équation (E').

En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels $a \wedge b = 2$.

Exercice 4 *Vrai - Faux*

1/ Soient A et B deux événements tels que $p(A) = 0,23$, $p(B) = 0,72$ et $p(AUB)=0,7844$. On a A et B sont deux événements indépendants.

2/ Soient A et B deux événements. On a : $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - p(A \cap B)$.

3/ Un sac contient 1000 boules noires et 5 boules blanches. Un joueur tire au hasard une boule du sac si sa couleur est noire alors il perd 1 dinar si non il gagne 100 dinars. Le jeu est favorable au joueur.

Exercice 5 bac

Le directeur du personnel d'une entreprise constate que, chaque hiver, un nombre important d'employés s'absentent, malades de la grippe.
Le médecin de l'entreprise lui assure qu'une personne non vaccinée contre la grippe à 40% de chances de la contacter, alors qu'une personne vaccinée n'a que 5% de risque de tomber malade. Le directeur décide donc de proposer au personnel une vaccination gratuite, afin de susciter des volontaires pour cette vaccination.

1/ On choisit un employé au hasard et on considère les évènements suivants:
V:«l'employé s'est fait vacciner»
G:«l'employé contactera la grippe durant l'hiver»

a) Déterminer les probabilités $p(G/V)$;$p(\bar{G}/V)$;$p(G/\bar{V})$ et $p(\bar{G}/\bar{V})$.

b) Exprimer la probabilité p(G) de l'évènement G en fonction de p(V) de l'évènement V.

2/ Déterminer le pourcentage minimum de personnes à vacciner pour que moins de 20% des employés aient la grippe cet hiver.

3/ Dans cette question, on suppose que 80% accepte de se faire vacciner.

a- Quelle est la probabilité p_1 qu'un employé, pris par hasard, tombe malade cet hiver ?

b- Ali, ingénieur dans l'entreprise, tombe malade de la grippe. Quelle est la probabilité p_2 qu'il soit vacciné ?

c- Calculer la probabilité p_3 qu'un employé, pris par hasard, ne soit pas vacciné et attrape la grippe ?

Exercice 6 **Bac**

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tire directs. Les experiences précédentes conduisent à penser que :

⊗ s'il arrête le $n^{ième}$ tir,la probabilité qu'il arrête le tir suivant $\left[(n+1)^{ième}\right]$ est 0,8.

⊗ s'il laisse passer le $n^{ième}$ tir, la probabilité qu'il arrête le suivant est 0,6.

⊗ la probabilité qu'il arrête le premier tir est 0,7.

A_n désigne l'événement « le gardien arrête le $n^{ième}$ tir ».

1/**a**- Donner $n \in IN^*$, les valeurs de $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(A_{n+1}/\overline{A_n})$.

b- Exprimer $p(A_{n+1} \cap A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de $p(A_n)$.

c- En déduire que $\forall n \in IN^*$ on a $p(A_{n+1}) = 0,2p(A_n) + 0,6$.

2/ On pose à présent pour $n \in IN^*$, $p_n = p(A_n)$ et $u_n = p_n - 0,75$.

a- Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

b- En déduire une expression de u_n en fonction de n.

c- Montrer que (p_n) admet une limite que l'on calculera.

Exercice 7 *bac tn 2009 s. principale - section EG.*

Une usine fabrique en grande série de climatiseurs susceptibles de présenter deux défauts a et b. Une étude statistique de la production conduit aux résultats suivants :

♦ 3 % des climatiseurs présentent le défaut a.

♦ Parmi les climatiseurs présentant le défaut a, 8 % présente le défaut b.

♦ Parmi les climatiseurs ne présentant pas le défaut a, 2% présente le défaut b.

On prélève au hasard un climatiseur dans la production. On désigne par A et B les événements suivants :

A:« Le climatiseur présente le défaut a». B:« Le climatiseur présente le défaut b»

. **1**/ faire un arbre pondéré.

2/ Pour cette question, on donne les résultats à quatre chiffres après la virgule.

a) Quelle est la probabilité que ce climatiseur présente à la fois les deux défauts a et b ?

b) Quelle est la probabilité que ce climatiseur présente le défaut b ?

c) Quelle est la probabilité que ce climatiseur ne présente pas aucun défaut ?

Exercice 8 *bac tn 2009 s. principale - section info.*

Une entreprise fabrique des calculatrices. Un contrôle de qualité a montré que chaque calculatrice fabriquée par cette entreprise pouvait présenter deux types de défauts indépendantes a et b.

Un calculatrice est dite défectueuse si elle présente au moins l'un des deux défauts.

On considère les deux événements suivants:

A:« une calculatrice fabriquée présente le défaut a»

B:« une calculatrice fabriquée présente le défaut b»

On suppose que les probabilités de A et B sont : p$(A) = 0,01$ et p$(B) = 0,03$.

1/**a**) Calculer p$(A \cap B)$.

b) En déduire que la probabilité pour qu'une calculatrice fabriquée soit défectueuse est égale à 0,0397.

2/ Une librairie passe une commande de 20 calculatrices. Calculer la probabilité que deux calculatrices dans cette commandes soient défectueuses.

3/ La librairie exige que sur une commande d'un nombre n de calculatrices, la probabilité d'avoir au moins une calculatrice défectueuse reste inférieure à 50%.
Déterminer le nombre maximum de calculatrice qu'elle peut commander.

Exercice 9 *bac tn 2009 s. principale - section technique*

Une caisse d'assurance maladie propose à ses affiliés une modalité d'hospitalisation m.

Les employés d'une entreprise sont tous affiliés à cette caisse d'assurance et on sait que :

- le $\frac{1}{3}$ des employés choisissent la modalité m.
- parmi les employés qui ont choisi la modalité m, 80% sont atteints d'une maladie chronique.
- parmi les employés qui n'ont pas choisi la modalité m, 75% sont atteints d'une maladie chronique.

On choisi un ployé au hasard et on considère les événements suivants:

M: « l'employé choisit la modalité m »

C: « l'employé est atteint d'un maladie chronique »

1/**a**) Déterminer les probabilités suivantes : p(M) , p(C/M) et p$(C/\overline{M})$

b) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2/**a**) Calculer la probabilité que cet employé ait choisi la modalité m et soit atteint d'une maladie chronique.

b) Calculer la probabilité que cet employé n'ait pas choisi la modalité m et soit atteint d'une maladie chronique.

c) En déduire p(C).

3/ Soit l'événement E:«l'employé choisit la modalité m, sachant qu'il est atteint d'une maladie chronique ». Montrer que p$(E) = \frac{8}{23}$.

Exercice 10

On dispose de deux urnes A et B. Dans A il y a 3 boules rouges et 2 boules blanches et dans B il y a une boule rouge et 3 boules blanches.

On considère l'épreuve (E) suivante:on tire simultanément deux boules de A puis on les met dans B puis on tire successivement sans remise deux boules de B. On considère l'alea numérique Y qui compte le nombre de boule rouge tirées de l'urne A.

1/ Déterminer la loi de probabilité de Y puis calculer son espérance mathématique E(Y).

2/ Soit l'événement C:«à la fin de l'épreuve l'urne B ne contient que des boules blanches». Montrer que la probabilité de C est égale à $\frac{11}{150}$.

3/ Calculer la probabilité d'avoir tirée une seule boule rouge de A sachant qu'à la fin de l'épreuve l'urne B contient zéro boule rouge.

4/ On répète l'épreuve précédente n (n$\in IN^*$) fois de suites en remettant les urnes dans leurs états initiales avant chaque répétition.

a) Dans cette question on prend n$=$5. Calculer la probabilité de H:« C est réalisé au plus une fois pendant les 5 répétitions».

b) n étant un élément de IN^*; soit p_n la probabilité de G_n:«au moins une fois C est réalisé pendant les n répétitions». Trouver le plus petit n pour que $p_n \geq 0.99$.

Exercice 11 **QCM**

1/ *(d'après bac)*: Soient A et B deux événements tels que p$(A) = 0,4$, $p(B) = 0,5$, p$(\overline{A \cup B}) = 0,35$.

a) p$(A \cap B) = 0,1$ **b**) p$(A \cap B) = 0,25$

c) les données sont insuffisantes pour répondre.

2/ Un variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,94$. Sachant que $E(X) = 14,1$ alors la valeur de n est :

a) 15 **b**) 13 **c**) 14

3/ On donne l'arbre de probabilité ci-contre:

a) $p(E/G) \approx 0,3$

b) $p(E/G) \approx 0,145$

c) $p(E/G) \approx 0,26$

4/ Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 1 boule rouge. On tire successivement et avec remise n (n$\in IN^*$) boule(s) de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boule rouge. On a :

a) $p(X=1) = \left(\frac{1}{9}\right)^n$ **b**) $p(X=1) = \frac{1}{9n}$ **c**) $p(X=1) = \frac{n}{3^{2n}}$.

5/ <u>(bac Tn 2008)</u> La durée de vie X, exprimée en années, d'une machine automatique suit une loi exponentielle de paramètre $0,4$. La probabilité que la machine tombe en pane avant 10 ans est égale à :

a) e^{-4} **b**) $1 - 0,4e^{-4}$ **c**) $1 - e^{-4}$.