Chapitre : Arithmétique + Probabilité + Eq différentielle +…

EXERCICE (5points)

Pour n entier natirel non nul on pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) a-Vérifier que n est pair pour tout n de IN^*

b- Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $a_n \equiv 0 \pmod 3$

2) Soit p un nombre premier $p > 3$

a-Montrer que $2^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$; $3^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$ et $6^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$

b-Montrer que a_{p-2} est divisible par p

c-Démontrer que pour tout q premier il existe un entier naturel non nul n tel que : $a_n \wedge q = q$

Exercice n°3 (4 points)

I/ Soit $n \in \mathbb{Z}$, on pose $a = 3n + 8$ et $b = n+1$

1) Montrer que $a \wedge b = b \wedge 5$

2) Déterminer les entiers n tels que $a \wedge b = 5$

3) En déduire $(3 \times 101^{2008}+8) \wedge (101^{2008}+1)$

II/ 1) Justifier que l'équation (E) : $65x + 77y = 1$ admet au moins une solution

2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E') : $65x + 77y = 5$

3). Déterminer s'ils existent des couples d'entiers naturels solutions de (E')

Exercice 3 : (4 points)

1) Résoudre dans ℤxℤ, l'équation: $7x - 13y = 1 \quad (E)$.

2) On considère dans ℤxℤ, l'équation: $7x - 13y = -4 \quad (E')$.

a) Vérifier que le couple (5,3) est une solution particulière de (E').

b) Résoudre dans ℤxℤ, l'équation (E').

3) Soit dans Z le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 5 \pmod{13} \\ n \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$

a) Montrer que le système (S) est équivaut à (S') : $\begin{cases} 7n \equiv 35 \pmod{91} \\ 13n \equiv 39 \pmod{91} \end{cases}$

b) En déduire qu'un entier n est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv 31 \pmod{91}$.

4) Pour tout entier n, on pose $a = 13n - 8$ et $b = 7n - 4$.

a) Montrer que le couple (a, b) est une solution de l'équation (E').
En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels $a \wedge b = 2$.

Exercice 4 Vrai - Faux *Exercice 11* **QCM**

1/ *(d'après bac)*: Soient A et B deux événements tels que $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,5$, $p(\overline{A \cup B}) = 0,35$.

a) $p(A \cap B) = 0,1$ **b**) $p(A \cap B) = 0,25$

c) les données sont insuffisantes pour répondre.

2/ Un variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,94$. Sachant que $E(X) = 14,1$ alors la valeur de n est :

a) 15 **b**) 13 **c**) 14

3/ On donne l'arbre de probabilité ci-contre:

a) $p(E/G) \approx 0,3$

b) $p(E/G) \approx 0,145$

c) $p(E/G) \approx 0,26$

4/ Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 1 boule rouge. On tire successivement et avec remise n (n$\in IN^*$) boule(s) de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boule rouge. On a :

a) $p(X=1) = \left(\frac{1}{9}\right)^n$ **b**) $p(X=1) = \frac{1}{9n}$ **c**) $p(X=1) = \frac{n}{3^{2n}}$.

5/ (bac Tn 2008) La durée de vie X, exprimée en années, d'une machine automatique suit une loi exponentielle de paramètre $0,4$. La probabilité que la machine tombe en pane avant 10 ans est égale à :

a) e^{-4} **b**) $1 - 0,4e^{-4}$ **c**) $1 - e^{-4}$.

Exercice 5 **Bac**

1/ Une urne U contient 4 jetons blancs et trois noirs. On tire successivement les 7 jetons sans remise. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur k si le premier jetons blanc apparait au k-ième tirage. Donner la loi de probabilité de X et calculer E(X).

2/ Une urne U' contient 17 jetons blancs et 18 jetons noirs. On jette un dé cubique (numéroté de 1 à 6) parfait .Si le 6 apparait, on tire un jeton de l'urne U sinon on tire un jeton de l'urne U' .

a- Démontrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est 0,5.

b- On a tirer un jeton blanc .Calculer la probabilité pour qu'il provienne de U.

Exercice 6 **Bac**

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher. Deux boules sont blanches et portent respectivement les nombres 1 et 2, les deux autres boules sont noires et portent respectivement les nombres 1 et 2. Une épreuve consiste à tirer successivement deux boules de la manière suivante : on tire une première boule

- Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on tire la deuxième boule.
- Si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne et on tire la deuxième boule.

1/ Soit X la variable aléatoire qui, à chaque épreuve, associe le nombre de fois où l'on obtient une boule blanche.

a- Donner la loi de probabilité de X.

b- Calculer son espérance mathématique.

2/ Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque épreuve associe le produit des nombres marqués sur les deux boules obtenues. Donner la loi de probabilité de Y.

Exercice 7

On dispose de deux urnes A et B. Dans A il y a 3 boules rouges et 2 boules blanches et dans B il y a une boule rouge et 3 boules blanches. On considère l'épreuve (E) suivante:on tire simultanément deux boules de A puis on les met dans B puis on tire successivement sans remise deux boules de B. On considère l'alea numérique Y qui compte le nombre de boule rouge tirées de l'urne A.

1/ Déterminer la loi de probabilité de Y puis calculer son espérance mathématique E(Y).

2/ Soit l'événement C:«à la fin de l'épreuve l'urne B ne contient que des boules blanches». Montrer que la probabilité de C est égale à $\frac{11}{150}$.

3/ Calculer la probabilité d'avoir tirée une seule boule rouge de A sachant qu'à la fin de l'épreuve l'urne B contient zéro boule rouge.

4/ On répète l'épreuve précédente n (n$\in IN^*$) fois de suites en remettant les urnes dans leurs états initiales avant chaque répétition.

a) Dans cette question on prend n$=$5. Calculer la probabilité de H:« C est réalisé au plus une fois pendant les 5 répétitions».

b) n étant un élément de IN^*; soit p_n la probabilité de G_n:«au moins une fois C est réalisé pendant les n répétitions». Trouver le plus petit n pour que $p_n \geq 0.99$.

Exercice 8 *bac tn 2009 s. principale - section info.*

Une entreprise fabrique des calculatrices. Un contrôle de qualité a montré que chaque calculatrice fabriquée par cette entreprise pouvait présenter deux types de défauts indépendantes a et b.

Un calculatrice est dite défectueuse si elle présente au moins l'un des deux défauts.

On considère les deux événements suivants:

A:« une calculatrice fabriquée présente le défaut a»

B:« une calculatrice fabriquée présente le défaut b»

On suppose que les probabilités de A et B sont : p$(A) = 0,01$ et p$(B) = 0,03$.

1/**a**) Calculer p$(A \cap B)$.

b) En déduire que la probabilité pour qu'une calculatrice fabriquée soit défectueuse est égale à 0,0397.

2/ Une librairie passe une commande de 20 calculatrices. Calculer la probabilité que deux calculatrices dans cette commandes soient défectueuses.

3/ La librairie exige que sur une commande d'un nombre n de calculatrices, la probabilité d'avoir au moins une calculatrice défectueuse reste inférieure à 50%.
Déterminer le nombre maximum de calculatrice qu'elle peut commander.

Exercice 9 Bac

Le parc de compteur d'eau des abonnés d'une commune se repartit de la façon suivante : 10% des compteurs ont moins de deux ans et se trouvent de ce fait sous garantie; 60% des compteurs ont entre deux et vingt ans; 30% des compteurs ont plus de 20 ans. Lors du passage de l'agent chargé de relever les compteurs, la probabilité de trouver le compteur défectueux est la suivante : $\frac{1}{100}$ $s'il$ s'agit d'un compteur sous garantie; $\frac{1}{20}$ s'il s'agit d'un compteur âgé de deux à vingt ans; $\frac{1}{10}$ $s'il$ s'agit d'un compteur de plus de vingt ans. On notera les événements :
A:« le compteur est sous garantie»; B:« le compteur a entre 2 et 20 ans d'âge »; C:« le compteur a plus de 20 ans d'âge »;
D:« le compteur est défectueux ».

1/ Calculer la probabilité des événements suivants:

« le compteur se trouve encore sous garantie et il est défectueux »
« le compteur est défectueux ».

2/ L'agent constate qu'un compteur est défectueux. Montrer que la probabilité qu'il soit encore sous garantie est égale à $\frac{1}{61}$.

3/ L'agent trouve huit compteurs défectueux. Quelle est la probabilité pour l'un au moins d'entre eux soit encore sous garantie ?

Exercice 10 bac

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur IR vérifiant la condition : (C) : $\begin{cases} f(-x)f(x) = 16;\ \forall x \in IR \\ f(0) = 4 \end{cases}$

1/ On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur IR par g$(x) = f(-x)f(x)$.

a- Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur IR.

b- Calculer la fonction dérivée de la fonction g.

c- En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

d- Montrer que la fonction f vérifie : $f' = \frac{1}{16}f$ et $f(0) = 4$

2/ Démontrer qu'il existe une seule fonction dérivable sur IR satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

Exercice 11

f est une soution sur IR de l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 1$ telle que y'$(1) = 3$.

1/ Démontrer que si y est solution de (E) alors pour tout réel x, y''(x)=$9y(x) - 3$.

2/ En déduire f''(1) et f(1).

3/ Déterminer la fonction f .

4/ Soit l'équation différentielle (E') : $y' + 3y = e^{3x}$

a- Soit la fonction g$(x) = \varphi(x)e^{3x}$. Montrer que g est solution de (E') si et seulement si φ est solution de (E)

b- Trouver les solutions de (E')

Exercice 12

On se propose de trouver les fonctions f dérivables sur IR et vérifiant la propriété suivantes : $\forall(x,t) \in IR^2$; f $(x+y) = f(x) \times f(y)$.

I]**1**/ Montrer que f$(0) = 0$ ou f$(0) = 1$.

2/ Déterminer f(x) quand f$(0) = 0$.

II] Dans toute cette partie on suppose que f$(0) = 1$ et on pose $f'(0) = a$.

1/ Calculer en fonction de a et du réel x_0 la valeur de $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

2/ Déduire que f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$

3/ Trouver alors la forme de f(x).

Exercice 13

Soit l'équation différentielle (E) : $y'(x) - y(-x) = x^2$ pour tout x réel.

1/ Soit l'équation différentielle $y'(x) - y(-x) = 0 \quad (1)$

a) Montrer que si une fonction f, deux fois dérivable, est solution de (1), *alors* f est aussi solution de (2) : $y''(x) + y(x) = 0$

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) Trouver alors l'expression de f(x) solution de (1)

2/**a**) Soit le polynome P:x $\mapsto ax^2 + bx + c$ avec a, b et c sont des réels. déterminer a, b et c pour que P soit une solution de (E).

b) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $(f - P)$

est solution de (1). **c**) Résoudre enfin l'équation (E).

Exercice 14 bac Fr 1998

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, $p(A)$ désigne la probabilité de A, $p(B/A)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1/ Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont le tableau de loi de probabilité :

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

avec $p_i = p(X = i)$.

a- Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

b- Calculer l'espérance mathématique de X.

2/ Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est $0,7$; celle qu'il achète du gazole est $0,3.$ son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants:

C_1 :« en cinq minutes, un seul client se présente »;

C_2 :« en cinq minutes, deux clients se présentent »;

E :« en cinq minutes, un seul client achète de l'essence».

a- Calculer $p(C_1 \cap E)$.

b- Montrer que $p(E/C_2) = 0,42$ et calculer $p(E \cap C_2)$.

c- En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3/ Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes; déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice 15 bac (du livre scolaire - exercice 30 page : 207)

Une machine fabrique des cylindres. On mesure l'écart X, en dixième de millimètres, entre le diamètre du cylindre et la valeur du reglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre 1,5.

1/ Calculer à 10^{-3} près, $p(X \leqslant 1)$, $p(X \geqslant 2)$ et $p(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

2/ Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté.

Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre à 80%.

Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

On au hasard un cylindre de la production.

a- Quelle est la probabilité qu'il soit accepté?

b- On sait qu'il est accepté, quelle est alors la probabilité qu'il ait subit une rectification?

Exercice 16

Une sossiété de marque M fabrique des ampoules éléctriques de durée de vies sont des variables aléatoires qui suivent des lois exponentielles des paramètres des réels strictement positifs.

1/ Dans cette question on s'interrèsse à un type d'ampoule de la sossiété dont la variable de durée de vie T est de paramètre est $\lambda = 0,001$.

Pour les questions suivantes on donnera d'abord le résultat exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

a- Déterminer la probabilité que cette ampoule ait une défaillance avant 100 heures.

b- Quelles est la probabilité qu'une ampoule de ce type ait une durée de vie supérieure à 1000 heures?

c- Sachant qu'une ampoule est en marche 500 heures, quelles est la probabilité quelle est une durée de vie inférieur à 1000 heures?

d- Déterminer t tel que $p(T \geqslant t) = 0,5$.

2/ λ étant quelconque de $]0,+\infty[$. Désignons par p_1 la probabilité qu'une ampoule, de la sossiété, de durée de vie T, de paramètre $\lambda,$ reste en marche un an à raison de 10 heures en 24 heures.
déterminer les λ tels que $p_1 \geqslant 0,8$.

3/ Les savants *montrent* que la durée de vie moyenne, en heures, d'une ampoule de durée de vie T, et de paramètre λ le réel $\overline{T}_\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}dt\right]$.

a- Montrer que $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}(-\lambda x)e^{(-\lambda x)} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$. déterminer $\overline{T}_\lambda$.

b- La sossiété presente au marché deux modèles l'un est de paramètre $\lambda_1 = 0,001$ au prix de 1 dinar et l'autre est de paramètre $\lambda_2 = 0,00001$ au prix de 10 dinars. Quel est le choix scientifiquement le plus économique?

Exercice 17 Extrait d'un bac

On considère la fonction f_1 définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_1(x)=\sqrt{1+x}\,e^{-x}$ et on désigne par C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1)**a**- Etudier la dérivabilité de f_1 à droite en -1.

b- Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c- Calculer la limite de f_1 en $+\infty$.

d- Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f_1.

3) Donner l'équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution α dans $[-\frac{1}{2},+\infty[$ et que $\alpha \in]-\frac{1}{2},1[$.

5) Tracer la courbe C_1.

6)**a**- Montrer que pour tout réel $x,$ on a $1+x \leq e^x$.

b- En déduire que pour tout réel $x,$ on a $f_1(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$.

7) Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^\lambda f_1(x)dx$.

a- Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$.

b- Montrer que pour tout $\lambda \geq 1,$ on a $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

Exercice 18 bac

1) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^3e^{1-x^2}$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Construire la courbe $\mathcal{C}$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur IN^* par : $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2}dx$.

a- Calculer u_1.

b- Montrer que pour tout n de IN^* on a : $\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.

En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

3)**a**- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de IN^* on a : $u_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n - \frac{1}{2}$.

b- En déduire l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=0 et x=1.