| L. B. Monastir | Série n : 67 | 4 $^{ème}$ Math |
|---|---|---|
| P.P. : Ali Zouhaïer | | |
| Chapitre : Probabilité + Statistique + équation diff. +… | | |

## Exercice 1 bac

Dans cette exercice, les résultats numériques devront être justifiés par le rappel des formules utilisées. Le tableau suivant donne l'âge X et la tension artérielle Y de 10 hommes.

| X | 58 | 40 | 74 | 34 | 65 | 49 | 53 | 51 | 36 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 16,7 | 13,1 | 17,2 | 11,6 | 15,5 | 15,1 | 14,2 | 14,4 | 13,0 | 14;2 |

**1**/ Déterminer la moyenne et la variance de chacune de ces variables.

**2**/ Déterminer le coefficient de correlation linéaire des variables X et Y. Interpréter le résultat.

**3**/ Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.

**4**/ Estimer la tension artérielle d'un homme âgé de 45 ans.

*Exercice 2 (bac tn.1996)*

Dans le tableau statistique suivant, $X$ désigne la température moyenne extérieur en 24 heures et $Y$ désigne la consommation de pétrole de chauffage pour les mêmes 24 heures pour une famille donnée.

| $X$ en degrés | -2 | 0 | 4 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ en litres | 40 | 30 | 20 | 15 | 10 |

**1**/ Construire, dans un plan rapporté à un repère orthogonal, le nuage de points représentant la série double donnée.

**2**/ Calculer le coefficient de correlation linéaire entre $X$ et $Y$ et vérifier qu'il y a une forte corrélation linéaire entre ces deux variables .

**3**/ Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de $Y$ en $X$.

**4**/ Quelle prévision (en litres) sur sa consommation de pétrole peut faire la famille considérée, si une vague de froid persiste pendant 48 heures avec une température moyenne extérieure de -4°.

## Exercice 3

Concernant la distance de freinage d'une automobile circulant sur une route humide, on donne l'information suivante :

| **Vitesse**(Km/h) | $x_i$ | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Distance freinage**(**m**) | $y_i$ | 29 | 42 | 57 | 75 | 94 | 115 | 150 | 166 | 193 |

**1**/ Calculer le coefficient de corrélation linéaire de $x$ et $y$. Interpréter le résultat trouvé.

**2**/ Etablir par la méthode des moindres carrés, l'équation de $D$ la droite de régression de $y$ en $x$.

**3**/ A l'aide la relation précédente, estimer la vitesse de l'automobile qui a fait 50 mètres de freinage.

**4**/ On suppose que les réflexes du conducteur répondent après une seconde quand il conduit a une vitesse de 72 Km/h. Estimer dans ce cas la distance pour stopper le véhicule dès qu'il voie le danger.

## Exercice 3 **bac**

Dans le tableau suivant,figurent les resultats d'une enquête réalisée dans une magasin pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures en fonction de son prix de vente.

| Prix x d'une paire (en dinars) | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre y d'acheteurs potentiels | 140 | 120 | 100 | 95 | 85 | 70 |

Le but de l'exercice est de déterminer le prix de vente pour le quel la recette correspendant à la commercialisation de ce modèle est maximale.

**1**/**a**) Calculer le coefficient de correlation linéaire de la serie double (x y).

**b**) En utilisant la methode de moindre carrés (regression de y en x), exprimer y en fonction de x, sous la forme y=ax+b (où a et b désigne des nombres dont donnera et on utilisera par la suite les approximations décimales arrondies a $10^{-3}$ prés pour a et à $10^{-1}$ prés pour b).

**2**/ On designe par r(x) la reccette correspondant à la ventes de y paires du modèle étudié au prix unitaire x.

**a**- En utilisant l'expression 1/b),exprimer r(x) en fonction de x.

**b**- donner,en l'arrendissant en dinars la plus prodhe le prix de vente pour laquelle la recette est maximale,calculer cette recette maximale.

*Exercice 5*

On se propose de trouver les fonctions f dérivables sur IR et vérifiant la propriété suivantes : $\forall (x,t) \in IR^2;$ f $(x+y) = f(x) \times f(y)$.

**I**]**1**/ Montrer que f$(0) = 0$ ou f$(0) = 1$.

**2**/ Déterminer f$(x)$ quand f$(0) = 0$.

**II**] Dans toute cette partie on suppose que f$(0) = 1$ et on pose $f'(0) = a$.

**1**/ Calculer en fonction de a et du réel $x_0$ la valeur de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

**2**/ Déduire que f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$

**3**/ Trouver alors la forme de f$(x)$.

*Exercice 6*

Soit l'équation différentielle $(E)$ : $y'(x) - y(-x) = x^2$ pour tout x réel.

**1**/ Soit l'équation différentielle $y'(x) - y(-x) = 0 \quad (1)$

**a**) Montrer que si une fonction f, deux fois dérivable, est solution de $(1), alors$ f est aussi solution de $(2)$ : $y''(x) + y(x) = 0$

**b**) Résoudre l'équation différentielle $(2)$.

**c**) Trouver alors l'expression de f(x) solution de $(1)$

**2**/**a**) Soit le polynome P:x $\mapsto ax^2 + bx + c$ avec a, b et c sont des réels. déterminer a, b et c pour que P soit une solution de $(E)$.

**b**) Montrer qu'une fonction f est solution de $(E)$ si et seulement si $(f-P)$ est solution de $(1)$. **c**) Résoudre enfin l'équation $(E)$.

*Exercice 7* *Bac Tn*

On donne l'équation différentielle $(E)$ : $y' - y = \big(x \ln(x)\big)e^x;\ \forall x > 0$.

**1**/ Résoudre l'équation $y' - y = 0$.

**2**/ Soit $g$ une fonction dérivable sur $IR^+$, on pose $f(x) = g(x)e^x$.

**a**- Déterminer $g'(x)$ pour que $f$ soit une solution de $(E)$.

**b**- Calculer $\int_1^x t\ln(t)$ dt pour tout $x > 0$.

**c**- En déduire $g(x)$ sachant que $g(1) = 0$.

**3**/ Déterminer alors la solution générale de $(E)$.

*Exercice 8* bac Fr 1998

Dans tout l'exercice, A et $B$ étant deux événements, $p(A)$ désigne la probabilité de $A$, $p(B/A)$ la probabilité de $B$ sachant que $A$ est réalisé.

**1**/ Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire $X$ dont le tableau de loi de probabilité :

| i | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,5 | 0,4 |

avec $p_i = p(X = i)$.

**a**- Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de $X$.
**b**- Calculer l'espérance mathématique de $X$.

**2**/ Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est $0,7$; celle qu'il achète du gazole est $0,3$. son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants:
$C_1$ :« en cinq minutes, un seul client se présente »;
$C_2$ :« en cinq minutes, deux clients se présentent »;
$E$ :« en cinq minutes, un seul client achète de l'essence».
**a**- Calculer $p(C_1 \cap E)$.
**b**- Montrer que $p(E/C_2) = 0,42$ et calculer $p(E \cap C_2)$.
**c**- En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

**3**/ Soit $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes; déterminer la loi de probabilité de $Y$.

*Exercice 9* extrait d'un bac

On s'intéresse à la durée de vie, exprimé en semaine, d'un composant éléctronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans viellisement définie sur l'intervalle [0, $+\infty$[: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est p$([0,t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$.
Une étude statistique, montrant qu'environ 50% d'un lot important de ces composants est encore en état de marche au bout de 200 semanes, permet de poser p$([0,t[) = \frac{1}{2}$.

**1**/ Montrer que $\lambda = \frac{\ln(2)}{200}$.

**2**/ Quelle est la probabilité qu'un de ses composant pris au hasard ait une durée de vie supérieur à 300 semaines?

**3**/ On admet que la durée de vie moyenne d$_m$ de ces composants est la limites de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx$ quand A tend vers $+\infty$.
**a**) Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.
**b**) En déduire d$_m$; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à la semaine près.

*Exercice 10*

On dispose de deux urnes A et B. Dans A il y a 3 boules rouges et 2 boules blanches et dans B il y a une boule rouge et 3 boules blanches. On considère l'épreuve $(E)$ suivante:on tire simultanément deux boules de A puis on les met dans B puis on tire successivement sans remise deux boules de B. On considère l'alea numérique Y qui compte le nombre de boule rouge tirées de l'urne A.

**1**/ Déterminer la loi de probabilité de Y puis calculer son espérance mathématique E$(Y)$.

**2**/ Soit l'événement C:«à la fin de l'épreuve l'urne B ne contient que des boules blanches». Montrer que la probabilité de C est égale à $\frac{11}{150}$.

**3**/ Calculer la probabilité d'avoir tirée une seule boule rouge de A sachant qu'à la fin de l'épreuve l'urne B contient zéro boule rouge.

**4**/ On répète l'épreuve précédente n (n$\in IN^*$) fois de suites en remettant les urnes dans leurs états initiales avant chaque répétition.
**a**) Dans cette question on prend n=5. Calculer la probabilité de H:« C est réalisé au plus une fois pendant les 5 répétitions».
**b**) n étant un élément de $IN^*$; soit $p_n$ la probabilité de $G_n$:«au moins une fois C est réalisé pendant les n répétitions». Trouver le plus petit n pour que $p_n \geq 0.99$.

## Exercice 11

Une société de marque M fabrique des ampoules éléctriques de durée de vies sont des variables aléatoires qui suivent des lois exponentielles des paramètres des réels strictement positifs.

**1**/ Dans cette question on s'interrèsse à un type d'ampoule de la sossiété dont la variable de durée de vie T est de paramètre est $\lambda = 0,001$.
Pour les questions suivantes on donnera d'abord le résultat exacte puis une valeur approchée à $10^{-3}$ près.

**a**- Déterminer la probabilité que cette ampoule ait une défaillance avant 100 heures.

**b**- Quelles est la probabilité qu'une ampoule de ce type ait une durée de vie supérieure à 1000 heures?

**c**- Sachant qu'une ampoule est en marche 500 heures, quelles est la probabilité quelle est une durée de vie inférieur à 1000 heures?

**d**- Déterminer t tel que $p(T \geqslant t) = 0,5$.

**2**/ $\lambda$ étant quelconque de ]0,+∞[. Désignons par $p_1$ la probabilité qu'une ampoule, de la sossiété, de durée de vie T, de paramètre $\lambda$, reste en marche un an à raison de 10 heurs en 24 heures.
déterminer les $\lambda$ tels que $p_1 \geqslant 0,8$.

**3**/ Les savants *montrent* que la durée de vie moyenne, en heures, d'une ampoule de durée de vie T, et de paramètre $\lambda$ le réel $\overline{T}_\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt\right]$.

**a**- Montrer que $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}(-\lambda x)e^{(-\lambda x)} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$.

**b**- La sossiété presente au marché deux modèles l'un est de paramètre $\lambda_1 = 0,001$ au prix de 1 dinar et l'autre est de paramètre $\lambda_2 = 0,00001$ au prix de 10 dinars. Quel est le choix scientifiquement le plus économique? justifier votre choix.

## Exercice 12

*Extrait d'un bac Tn 2007*

Dans ce problème $n$ désigne un entier naturel non nul.

**A**]**1**) Soit $g_n$ la fonction définie sur $IR$ par $g_n(x) = n(x+1) + e^x$.

**a**- Dresser le tableau de variation de $g_n$.

**b**- Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans $IR$ une unique solution $\alpha_n$.

**c**- Prouver que $-2 < \alpha_n < -1$.

**d**- En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**2**) Soit $f_n$ la fonction définie sur $IR$ par $f_n(x) = \frac{xe^x}{n+e^x}$. On désigne par $C_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**a**- Montrer que pour tout $x$ de $IR$, $f_n'(x) = \frac{e^x g_n(x)}{(n+e^x)^2}$.

**b**- Montrer que $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$. **c**- Dresser le tableau de variation de $f_n$.

**B**] Soient $I = \int_{-1}^0 xe^x dx$ et $u_n = \int_{-1}^0 f_n(x)dx$

**1**/ Calculer $I$.

**2**/ Montrer que $\forall x \in [-1,0]$, $\frac{xe^x}{n} \leqslant \frac{xe^x}{n+e^x} \leqslant \frac{xe^x}{n+1}$

**3**/ Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**4**/**a**- Montrer que pour tout entier naturel non nul $k$, $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k+1}$.

**b**- En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \geqslant Log(n+2) - Log2$.

**c**- Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = -\infty$.