Exercice 1 bac

Une étude statistique sur un produit a donné le tableau suivant:
x est en dinars et y et z en miliers de kilogramme.

Prix proposé x	0,30	0,35	0,45	0,65	0,80	1
Demande y	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25
Ofre z	1,25	1,30	1,30	1,50	1,55	1,60

1/ Le plan P est rapporté au repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 10 cm pour 1 dinar en abscisse et 2 cm pour 1 milier de kilogramme en ordonnée.

a- Representer le nuage de points associés à la série (x,y).

b- Calculer r_1 le coéfficient de corrélation linéaire de (x,y); interpréter.

2/ Soit $Y = Log(y)$.

a- former la série double $(x;Y)$.

b- Calculer r_2 le coéfficient de corrélation linéaire de (x,Y); interpréter.

c-**i**) Donner la droite de regression de Y en x.

ii) En déduire l'expression de y en fonction de x.

3/**a**- Justifier qu'on a une relationde type linéaire entre x et z.

b- Par la méthode des moindres carrés ajuster z en fonctionde x.

4/ On appelle prix d'équilibre d'un produit celui avec lequel l'offre et le demande sont égales. Posons la fonction $f : [0;2] \to IR; x \mapsto f(x) = y - z$

a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Montrer l'équation $f(x)$ possède une seule solution x_0 et que $x_0 \in \left[0,8\ ;\ 1,2\right]$.

c- En déduire un encadrement du prix d'équilibre d'amplitude inferieur à 10^{-1}.

Exercice 2 **bac**

Dans le tableau suivant,figurent les resultats d'une enquête réalisée dans une magasin pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels d'un modéle de chaussures en fonction de son prix de vente.

Prix x d'une paire (en dinars)	35	40	45	50	55	60
Nombre y d'acheteurs potentiels	140	120	100	95	85	70

Le but de l'exercice est de déterminer le prix de vente pour le quel la recette correspendant à la commercialisation de ce modèle est maximale.

1/**a**) Calculer le coefficient de correlation linéaire de la serie double (x y).

b) En utilisant la methode de moindre carrés (regression de y en x), exprimer y en fonction de x, sous la forme y=ax+b (où a et b désigne des nombres dont donnera et on utilisera par la suite les approximations décimales arrondies a 10^{-3} prés pour a et à 10^{-1} prés pour b).

2/ On designe par r(x) la reccette correspondant à la ventes de y paires du modèle étudié au prix unitaire x.

a- En utilisant l'expression 1/b),exprimer r(x) en fonction de x.

b- donner,en l'arrendissant en dinars la plus prodhe le prix de vente pour laquelle la recette est maximale,calculer cette recette maximale.

Exercice 3 *Extrait d'un devoir (légèrement modifié)*

Dans cette exercice, les résultats numériques devront être justifiés par le rappel des formules utilisées.
Dans un lycée on a relévé, durant 10 années, le taux de redoublement dans les élèves et on a obtenu les résultats suivants :

Année :X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux % :Y	5,4	2,8	2,6	5,2	6,4	9,2	9,9	10,7	13,2	14,8

1/ Représenter le nuage de points de cette série dans un repère orthogonal.
2/ Déterminer les coordonnées du point moyen.
3/ Trouver un ajustement linéaire de ce nuage par la méthode de Mayer.
4/**a**- Un ajustement linéaire par la méthode de mondres carrées est - il justifié ?
b- Trouver par la méthode de moindres carrés l'équation de la droite de regression de y en x.
5/ Quelle estimation peut-on faire pour le taux de redoublement à la vingtième année? Cette exploitation est-elle acceptable ?

Exercice 3 (5 points)

On donne l'équation différentielle (E) : $y' - y - e^x + 1 = 0$. On pose $z = y - xe^x - 1$.

1) Montrer que vérifie l'équation différentielle (E') : z' = z et déterminer z en fonction de x.

2) Déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^x + 1$ est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

3) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a- Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (D) à (C).

b- Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote (D).

4) a- Vérifier, en utilisant la question 2. , que pour tout x réel, $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$

b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 5 bac Fr 1998

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, $p(A)$ désigne la probabilité de A, $p(B/A)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.
1/ Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont le tableau de loi de probabilité :

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

avec $p_i = p(X = i)$.

a- Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
b- Calculer l'espérance mathématique de X.
2/ Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est $0,7$; celle qu'il achète du gazole est $0,3$. son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants:
C_1 :« en cinq minutes, un seul client se présente »;
C_2 :« en cinq minutes, deux clients se présentent »;
E :« en cinq minutes, un seul client achète de l'essence».
a- Calculer $p(C_1 \cap E)$. **b**- Montrer que $p(E/C_2) = 0,42$ et calculer $p(E \cap C_2)$.
c- En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.
3/ Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes; déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice 6

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. le premier urne U_1 contient le premier

5 boules blanches 3 boules noires et 2 boules rouges . U_2 contient 3 boules blanches, 6 boules noires et une boules rouge. On procède une suite de tirage avec remise qui se termine quand on tire une boule rouge. Le tirage commence de U_1 puis on suis la regle suivante: si on tire une boule blanche le tirage suivant sera de U_1 si non il s'éffectua de U_2.

I]**1**/ Calculer la probabilité que le jeu s'arrète au troisième tirage.

2/ Calculer la probabilité que la deuxième boule soit noire sachant que la troisième est blanche.

3/ Calculer la probabilité que la deuxième fois boule noire est au 4-ième tirage.

II] Dans cette partie on remplace les boules rouges par des boules blanches dans les deux urnes.Soit n un entier naturel non nul. Désignons par p_n la probabilité de l'évènement A_n : « Obtenir une boule blanche au nième tirage ».

1/**a**- Calculer p_1. **b**- Montrer que $\forall n \in IN^*;\ p_{n+1} = \frac{3}{10}p_n + \frac{2}{5}$.

2/ Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = p_n + \alpha$ ou α un réel.

a- Déterminer α pour que (u_n) soit une suite géométrique.

b- Pour la valeur trouvée de α, exprimer u_n puis p_n en fonction de n.

c- Posons $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_n$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} [S_n]$.

Exercice -7- *(4 points)*

Une entreprise fabrique des calculatrices. Un contrôle de qualité a montré que chaque calculatrice fabriquée par cette entreprise pouvait présenter deux types de défauts indépendants a et b.

Une calculatrice est dite défectueuse si elle présente au moins l'un des deux défauts. On considère les deux événements suivants:

A:« une calculatrice fabriquée présente le défaut a»

B:« une calculatrice fabriquée présente le défaut b»

D:« une calculatrice fabriquée est défectueuse »

On suppose que les probabilités de A et B sont : $p(A) = 0,01$ et $p(B) = 0,03$.

1/**a**- Calculer $p(A \cap B)$. **b**- Prouver que $p(D) = 0{,}0397$.

2/ Un commerçant passe une commande de 10 calculatrices.

Calculer la probabilité p_1 que trois calculatrices dans cette commande soient défectueuses.

3/ Un commerçant exige que sur une commande d'un nombre n de calculatrices, la probabilité d'avoir au plus $(n-1)$ calculatrices défectueuses reste inférieure à 0,1. Déterminer le nombre maximum de calculatrice que le commerçant peut commander.

4/ On admet que la durée de vie T en année d'une calculatrice de cette entreprise suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a- Déterminer, à 10^{-2} près, la valeur de λ sachant que $p(T \geqslant 10) = 0,7$.

b- Calculer la probabilité qu'une calculatrice de cette entreprise dure entre 6 mois et 7 ans.

c- Tu as trouvé une calculatrice de cette entreprise **déjà utilisée**.

Quelle est la probabilité qu'elle reste encor en marche au plus1 ans?

Question bonus *(1,5 points)*

5/ Le coût de fabrication est estimé à 20 dinars la calculatrice. Comment doit être x, en dinars, le gain sur chaque calculatrice pour que l'entreprise s'estime bénéficière?

Exercice 8

Une société de marque M fabrique des ampoules éléctriques de durée de vies sont des variables aléatoires qui suivent des lois exponentielles des paramètres des réels strictement positifs.

1/ Dans cette question on s'interrèsse à un type d'ampoule de la sossiété dont la variable de durée de vie T est de paramètre est $\lambda = 0,001$.
Pour les questions suivantes on donnera d'abord le résultat exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

a- Déterminer la probabilité que cette ampoule ait une défaillance avant 100 heures.

b- Quelles est la probabilité qu'une ampoule de ce type ait une durée de vie supérieure à 1000 heures?

c- Sachant qu'une ampoule est en marche 500 heures, quelles est la probabilité quelle est une durée de vie inférieur à 1000 heures?

d- Déterminer t tel que $p(T \geqslant t) = 0,5$.

2/ λ étant quelconque de $]0,+\infty[$. Désignons par p_1 la probabilité qu'une ampoule, de la sossiété, de durée de vie T, de paramètre λ, reste en marche un an à raison de 10 heurs en 24 heures.
déterminer les λ tels que $p_1 \geqslant 0,8$.

3/ Les savants *montrent* que la durée de vie moyenne, en heures, d'une ampoule de durée de vie T, et de paramètre λ le réel $\overline{T}_\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt \right]$.

a- Montrer que $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}(-\lambda x)e^{(-\lambda x)} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$.

b- La sossiété presente au marché deux modèles l'un est de paramètre $\lambda_1 = 0,001$ au prix de 1 dinar et l'autre est de paramètre $\lambda_2 = 0,00001$ au prix de 10 dinars. Quel est le choix scientifiquement le plus économique? justifier votre choix.

Exercice 9 ♦

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}; \vec{k}\right)$. On considère les points $A(2,1,-1)$ et $B\left(-5,\ 1,-4\right)$ et les droites Δ et D définies par :

$$D : \begin{cases} x = -3 + 2\beta \\ y = -\beta \\ z = 2 + \beta \end{cases} ;\ \beta \in IR.$$

1/**a**- Donner deux points distincts E et F de D.

b- Prouver que (AB) et D ne sont pas coplanaires.

2/ Soit Q un plan contenant (AB) et parallèle à D.

a- Prouver que $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{EF}$ est un vecteur normal à Q.

b- Donner alors une équation cartésienne de Q.

3/ Déterminer les points $M(x,y;2010)$ de Q avec $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

4/ Soit S la sphère de centre E et tangente à Q.

a- Déterminer le centre et le rayon de S'=T(S) avec T la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

b- Déterminer H le point de contact de S et Q.

c- En déduire S'$\cap Q$.

Exercice 10 *(5 points)*

L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère le les points $A(2,1,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ et $D_m(0,m,1)$ avec m un paramètre réel.

1/**a**- Calculer l'aire du triangle ABC

b- Montrer que $ABCD_m$ est un tétraèdre *si* et seulement si m $\neq 0$

c- Vérifier que le volume V de ABCD$_m$ est $\frac{|m|}{3}$.

d- En déduire, en fonction de m, la distance entre D$_m$ et le plan (ABC).

2/**a**- Vérifier que la sphère S$_m$ circonscrit à ABCD$_m$ à pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - my - mz + m - 1 = 0$$

b- Déterminer le centre I$_m$ de S$_m$.

3/ Soit h l'homothétie de centre A et de rapport (-2)

a- Calculer l'aire de AB'C' avec C'=h(C) et B'=h(B)

b- Déterminer h$(S_m)\cap(ABC)$.

4/a- Donner les expressions analytiques de h.

b- Caractériser l'application T=h$\circ h'$ avec h' l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{-2}$.

c- Donner l'équation cartésienne de l'image du plan (ABC) par T.

Exercice 11 *Extrait d'un bac Tn 2007*

Dans ce problème n désigne un entier naturel non nul.

A]1) Soit g_n la fonction définie sur IR par $g_n(x)=n(x+1)+e^x$.

a- Dresser le tableau de variation de g_n.

b- Montrer que l'équation $g_n(x)=0$ admet dans IR une unique solution α_n.

c- Prouver que $-2<\alpha_n<-1$.

d- En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit f_n la fonction définie sur IR par $f_n(x)=\dfrac{xe^x}{n+e^x}$. On désigne par C$_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a- Montrer que pour tout x de IR, $f'_n(x)=\dfrac{e^x g_n(x)}{(n+e^x)^2}$.

b- Montrer que $f_n(\alpha_n)=1+\alpha_n$. **c**- Dresser le tableau de variation de f_n.

B] Soient $I=\int_{-1}^{0}xe^x dx$ et $u_n=\int_{-1}^{0}f_n(x)dx$

1/ Calculer I.

2/ Montrer que $\forall x\in[-1,0]$, $\dfrac{xe^x}{n}\leqslant\dfrac{xe^x}{n+e^x}\leqslant\dfrac{xe^x}{n+1}$

3/ Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

4/a- Montrer que pour tout entier naturel non nul k, $\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{t}dt\leqslant\dfrac{1}{k+1}$.

b- En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\geqslant\ln(n+2)-\ln 2$.

c- Montrer alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k=-\infty$.

Exercice -12- *d'après un devoir*

Soit f la fonction définie sur IR par f$(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1/ On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y'-y=\dfrac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.

a- Vérifier que f est une solution de (E).

b- Soit h une fonction dérivable sur IR.

Montrer que h est une solution de (E) si et seulement si h-f est une solution de l'équation (E_0) : $y'-y=0$.

c- Résoudre (E_0) et en déduire les solutions de (E).

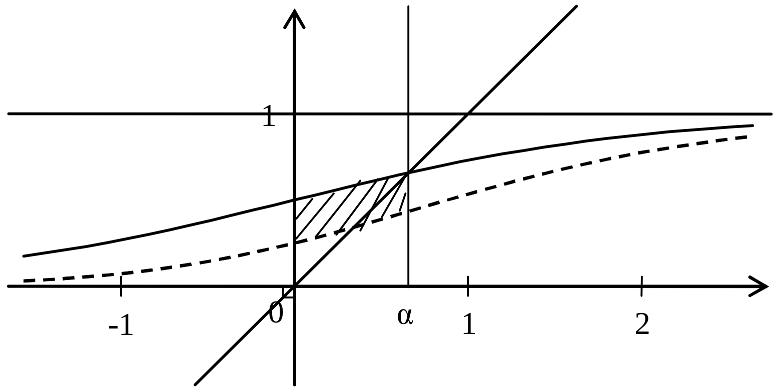
2/a- Dressser le tableau de variation de f.

b- Le tableau ci-dessous de celui de la fonction g définie sur IR par g$(x)=f(x)-x$

x	$-\infty$ $+\infty$
g'(x)	$-$
g(x)	$+\infty$ ↘ $-\infty$

Montrer que l'équation f$(x)=x$ admet dans IR une unique solution α et que $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

3/ Dans la figure ci-dessous on a tracé les courbes de f et f^2



a- Indiquer lequel est la courbe de f et celui de f^2.

b- Vérifier que pour tout réel x on a $f(x) - f^2(x) = f'(x)$.

b- Calculer l'aire de la partie hachurée du plan

4/ Pour tout entier n$\geqslant 1$, $I_n = \int_0^{\alpha} f^n(x)dx$.

a- Montrer que $\forall n \geqslant 1$; $I_{n+1} - I_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2^n} - \alpha^n\right)$.

b- Montrer que (I_n) est croissante et qu'elle est convergente.

c- Montrer que pour tout n $\geqslant 1$, $\dfrac{\alpha}{2^n} \leqslant I_n \leqslant \alpha^{n+1}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice -13- *d'après un devoir*

Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $42x + 5y = 3$

1/ Montrer que si (x_0, y_0) est une solution de (E) alors y_0 est divisible par 3.

2/ Soit (x_0, y_0) est une solution de (E) et d=$x_0 \wedge y_0$.

Quelle sont les valeurs possibles de d ?

3/**a**- Déterminer une solution particulière de (E).

b- Résoudre (E).

c- Déterminer les solutions (x, y) de (E) telles que x $\wedge y = 3$.

4/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = 0$

Exercice -14- bac