

| | | |
|---|---------------------|-----------------------------|
| L. B. Monastir | Série n : 68 | 4^{ème} Math |
| P.P. : Ali Zouhaïer | | |
| Chapitre : Proba + Stat + éq. diff. + arithm + L.E.I + Espace+... | | |

Exercice 1 bac

Une étude statistique sur un produit a donné le tableau suivant:
 x est en dinars et y et z en milliers de kilogramme.

| | | | | | | | |
|--------------|-----|------|------|------|------|------|------|
| Prix proposé | x | 0,30 | 0,35 | 0,45 | 0,65 | 0,80 | 1 |
| Demande | y | 6,25 | 4,90 | 3,75 | 2,75 | 2,40 | 2,25 |
| Ofre | z | 1,25 | 1,30 | 1,30 | 1,50 | 1,55 | 1,60 |

- 1/ Le plan P est rapporté au repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unités graphiques
 10 cm pour 1 dinar en abscisse et 2 cm pour 1 millier de kilogramme en ordonnée.
 - a- Représenter le nuage de points associés à la série (x, y) .
 - b- Calculer r_1 le coefficient de corrélation linéaire de (x, y) ; interpréter.
- 2/ Soit $Y = \text{Log}(y)$.
 - a- former la série double $(x; Y)$.
 - b- Calculer r_2 le coefficient de corrélation linéaire de (x, Y) ; interpréter.
 - c-i) Donner la droite de régression de Y en x .
 ii) En déduire l'expression de y en fonction de x .
- 3/a- Justifier qu'on a une relation de type linéaire entre x et z .
 b- Par la méthode des moindres carrés ajuster z en fonction de x .
- 4/ On appelle prix d'équilibre d'un produit celui avec lequel l'offre et la demande sont égales. Posons la fonction $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = y - z$
 - a- Dresser le tableau de variation de f .
 - b- Montrer l'équation $f(x)$ possède une seule solution x_0 et que $x_0 \in [0,8 ; 1,2]$.
 - c- En déduire un encadrement du prix d'équilibre d'amplitude inférieure à 10^{-1} .

Exercice 2 bac

Dans le tableau suivant, figurent les résultats d'une enquête réalisée dans un magasin pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures en fonction de son prix de vente.

| | | | | | | |
|-----------------------------------|-----|-----|-----|----|----|----|
| Prix x d'une paire (en dinars) | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
| Nombre y d'acheteurs potentiels | 140 | 120 | 100 | 95 | 85 | 70 |

Le but de l'exercice est de déterminer le prix de vente pour lequel la recette correspondant à la commercialisation de ce modèle est maximale.

- 1/a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série double (x, y) .
 b) En utilisant la méthode de moindres carrés (régression de y en x), exprimer y en fonction de x , sous la forme $y = ax + b$ (où a et b désignent des nombres dont donnera et on utilisera par la suite les approximations décimales arrondies à 10^{-3} près pour a et à 10^{-1} près pour b).
- 2/ On désigne par $r(x)$ la recette correspondant à la vente de y paires du modèle étudié au prix unitaire x .
 - a- En utilisant l'expression 1/b), exprimer $r(x)$ en fonction de x .
 - b- donner, en l'arrondissant en dinars la plus proche le prix de vente pour laquelle la recette est maximale, calculer cette recette maximale.

Exercice 3

Soit l'équation différentielle (E) : $y'(x) - y(-x) = x^2$ pour tout x réel.

1/ Soit l'équation différentielle $y'(x) - y(-x) = 0$ (1)

a) Montrer que si une fonction f , deux fois dérivable, est solution de (1), alors

f est aussi solution de (2) : $y''(x) + y(x) = 0$

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) Trouver alors l'expression de $f(x)$ solution de (1)

2/a) Soit le polynôme $P: x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec a, b et c sont des réels.

déterminer a, b et c pour que P soit une solution de (E).

b) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $(f - P)$ est solution de (1).

c) Résoudre enfin l'équation (E).

Exercice 3 (5 points)

On donne l'équation différentielle (E) : $y' - y - e^x + 1 = 0$. On pose $z = y - xe^x - 1$.

1) Montrer que vérifie l'équation différentielle (E') : $z' = z$ et déterminer z en fonction de x .

2) Dédurre que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x - 1)e^x + 1$ est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

3) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (D) à (C).

b- Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote (D).

4) a- Vérifier, en utilisant la question 2. , que pour tout x réel, $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$

b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 5 bac Fr 1998

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, $p(A)$ désigne la probabilité de A , $p(B/A)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1/ Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont le tableau de loi de probabilité :

| | | | |
|-------|-----|-----|-----|
| i | 0 | 1 | 2 |
| p_i | 0,1 | 0,5 | 0,4 |

avec $p_i = p(X = i)$.

a- Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X .

b- Calculer l'espérance mathématique de X .

2/ Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7; celle qu'il achète du gazole est 0,3. son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants:

C_1 : « en cinq minutes, un seul client se présente »;

C_2 : « en cinq minutes, deux clients se présentent »;

E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence ».

a- Calculer $p(C_1 \cap E)$.

b- Montrer que $p(E/C_2) = 0,42$ et calculer $p(E \cap C_2)$.

c- En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3/ Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes; déterminer la loi de probabilité de Y .

Exercice 6

On dispose de deux urnes A et B . Dans A il y a 3 boules rouges et 2 boules blanches et dans B il y a une boule rouge et 3 boules blanches.

On considère l'épreuve (E) suivante: on tire simultanément deux boules de A puis on les met dans B puis on tire successivement sans remise

deux boules de B. On considère l'alea numérique Y qui compte le nombre de boule rouge tirées de l'urne A.

1/ Déterminer la loi de probabilité de Y puis calculer son espérance mathématique $E(Y)$.

2/ Soit l'événement C: «à la fin de l'épreuve l'urne B ne contient que des boules blanches». Montrer que la probabilité de C est égale à $\frac{11}{150}$.

3/ Calculer la probabilité d'avoir tirée une seule boule rouge de A sachant qu'à la fin de l'épreuve l'urne B contient zéro boule rouge.

4/ On répète l'épreuve précédente n ($n \in \mathbb{N}^*$) fois de suites en remettant les urnes dans leurs états initiales avant chaque répétition.

a) Dans cette question on prend $n=5$. Calculer la probabilité de H: « C est réalisé au plus une fois pendant les 5 répétitions ».

b) n étant un élément de \mathbb{N}^* ; soit p_n la probabilité de G_n : «au moins une fois C est réalisé pendant les n répétitions». Trouver le plus petit n pour que $p_n \geq 0.99$.

Exercice -7- (4 points)

Une entreprise fabrique des calculatrices. Un contrôle de qualité a montré que chaque calculatrice fabriquée par cette entreprise pouvait présenter deux types de défauts indépendants a et b.

Une calculatrice est dite défectueuse si elle présente au moins l'un des deux défauts. On considère les deux événements suivants:

A: « une calculatrice fabriquée présente le défaut a »

B: « une calculatrice fabriquée présente le défaut b »

D: « une calculatrice fabriquée est défectueuse »

On suppose que les probabilités de A et B sont : $p(A) = 0,01$ et $p(B) = 0,03$.

1/a- Calculer $p(A \cap B)$.

b- Prouver que $p(D) = 0,0397$.

2/ Un commerçant passe une commande de 10 calculatrices.

Calculer la probabilité p_1 que trois calculatrices dans cette commande soient défectueuses.

3/ Un commerçant exige que sur une commande d'un nombre n de calculatrices, la probabilité d'avoir au plus $(n - 1)$ calculatrices défectueuses reste inférieure à 0,1. Déterminer le nombre maximum de calculatrice que le commerçant peut commander.

4/ On admet que la durée de vie T en année d'une calculatrice de cette entreprise suit une loi exponentielle de paramètre λ .

a- Déterminer, à 10^{-2} près, la valeur de λ sachant que $p(T \geq 10) = 0,7$.

b- Calculer la probabilité qu'une calculatrice de cette entreprise dure entre 6 mois et 7 ans.

c- Tu as trouvé une calculatrice de cette entreprise **déjà utilisée**.

Quelle est la probabilité qu'elle reste encor en marche au plus 1 ans?

.....

Question bonus (1,5 points)

5/ Le coût de fabrication est estimé à 20 dinars la calculatrice. Comment doit être x , en dinars, le gain sur chaque calculatrice pour que l'entreprise s'estime bénéficiaire?

Exercice 8

Une société de marque M fabrique des ampoules électriques de durée de vies sont des variables aléatoires qui suivent des lois exponentielles des paramètres des réels strictement positifs.

- 1/ Dans cette question on s'intéresse à un type d'ampoule de la société dont la variable de durée de vie T est de paramètre $\lambda = 0,001$.
 Pour les questions suivantes on donnera d'abord le résultat exact puis une valeur approchée à 10^{-3} près.
- Déterminer la probabilité que cette ampoule ait une défaillance avant 100 heures.
 - Quelles est la probabilité qu'une ampoule de ce type ait une durée de vie supérieure à 1000 heures?
 - Sachant qu'une ampoule est en marche 500 heures, quelles est la probabilité quelle est une durée de vie inférieure à 1000 heures?
 - Déterminer t tel que $p(T \geq t) = 0,5$.
- 2/ λ étant quelconque de $]0, +\infty[$. Désignons par p_1 la probabilité qu'une ampoule, de la société, de durée de vie T , de paramètre λ , reste en marche un an à raison de 10 heures en 24 heures.
 déterminer les λ tels que $p_1 \geq 0,8$.
- 3/ Les savants *montrent* que la durée de vie moyenne, en heures, d'une ampoule de durée de vie T , et de paramètre λ le réel $\bar{T}_\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt \right]$.
- Montrer que $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} (-\lambda x) e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$.
 - La société présente au marché deux modèles l'un est de paramètre $\lambda_1 = 0,001$ au prix de 1 dinar et l'autre est de paramètre $\lambda_2 = 0,00001$ au prix de 10 dinars. Quel est le choix scientifiquement le plus économique? justifier votre choix.

Exercice 9



L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2, 1, -1)$ et $B(-5, 1, -4)$ et les droites Δ et D définies par :

$$D : \begin{cases} x = -3 + 2\beta \\ y = -\beta \\ z = 2 + \beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}.$$

- Donner deux points distincts E et F de D.
 - Prouver que (AB) et D ne sont pas coplanaires.
- Soit Q un plan contenant (AB) et parallèle à D .
 - Prouver que $\vec{N} = \vec{AB} \wedge \vec{EF}$ est un vecteur normal à Q.
 - Donner alors une équation cartésienne de Q.
- Déterminer les points $M(x, y, 2010)$ de Q avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
- Soit S la sphère de centre E et tangente à Q.
 - Déterminer le centre et le rayon de $S' = T(S)$ avec T la translation de vecteur \vec{EF} .
 - Déterminer H le point de contact de S et Q.
 - En déduire $S' \cap Q$.

Exercice 10 (5 points)

L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2, 1, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ et $D_m(0, m, 1)$ avec m un paramètre réel.

- Calculer l'aire du triangle ABC
 - Montrer que $ABCD_m$ est un tétraèdre si et seulement si $m \neq 0$
 - Vérifier que le volume V de $ABCD_m$ est $\frac{|m|}{3}$.
 - En déduire, en fonction de m , la distance entre D_m et le plan (ABC) .
- Vérifier que la sphère S_m circonscrite à $ABCD_m$ a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - my - mz + m - 1 = 0$

- b- Déterminer le centre I_m de S_m .
- 3/ Soit h l'homothétie de centre A et de rapport (-2)
- a- Calculer l'aire de $AB'C'$ avec $C'=h(C)$ et $B'=h(B)$
- b- Déterminer $h(S_m) \cap (ABC)$.
- 4/a- Donner les expressions analytiques de h .
- b- Caractériser l'application $T=h \circ h'$ avec h' l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{-2}$.
- c- Donner l'équation cartésienne de l'image du plan (ABC) par T .

Exercice 11 Extrait d'un bac Tn 2007

Dans ce problème n désigne un entier naturel non nul.

- A]1) Soit g_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $g_n(x) = n(x+1) + e^x$.
- a- Dresser le tableau de variation de g_n .
- b- Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une unique solution α_n .
- c- Prouver que $-2 < \alpha_n < -1$.
- d- En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x .
- 2) Soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = \frac{xe^x}{n+e^x}$. On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- a- Montrer que pour tout x de \mathbb{R} , $f'_n(x) = \frac{e^x g_n(x)}{(n+e^x)^2}$.
- b- Montrer que $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$. c- Dresser le tableau de variation de f_n .
- B] Soient $I = \int_{-1}^0 xe^x dx$ et $u_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$
- 1/ Calculer I .
- 2/ Montrer que $\forall x \in [-1, 0], \frac{xe^x}{n} \leq \frac{xe^x}{n+e^x} \leq \frac{xe^x}{n+1}$
- 3/ Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.
- 4/a- Montrer que pour tout entier naturel non nul $k, \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1}$.
- b- En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \geq \ln(n+2) - \ln 2$.
- c- Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = -\infty$.

Exercice -12- d'après un devoir

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

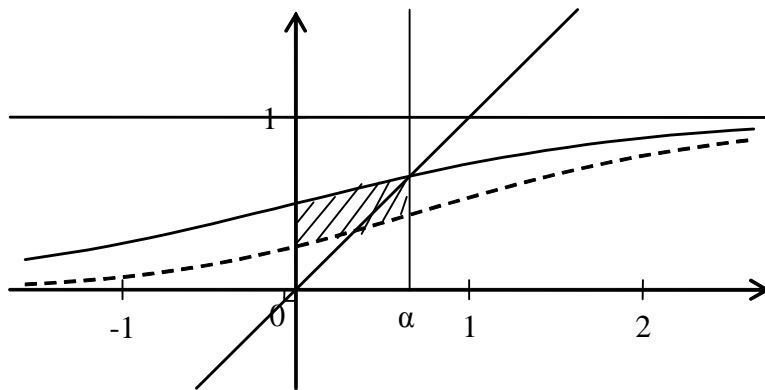
- 1/ On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E) : y' - y = \frac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.
- a- Vérifier que f est une solution de (E) .
- b- Soit h une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
Montrer que h est une solution de (E) si et seulement si $h-f$ est une solution de l'équation $(E_0) : y' - y = 0$.
- c- Résoudre (E_0) et en déduire les solutions de (E) .
- 2/a- Dresser le tableau de variation de f .
- b- Le tableau ci-dessous de celui de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x) - x$

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | - | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans \mathbb{R} une unique solution α et

que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

3/ Dans la figure ci-dessous on a tracé les courbes de f et f^2



a- Indiquer lequel est la courbe de f et celui de f^2 .

b- Vérifier que pour tout réel x on a $f(x) - f^2(x) = f'(x)$.

b- Calculer l'aire de la partie hachurée du plan

4/ Pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^\alpha f^n(x) dx$.

a- Montrer que $\forall n \geq 1$; $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2^n} - \alpha^n \right)$.

b- Montrer que (I_n) est croissante et qu'elle est convergente.

c- Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{\alpha}{2^n} \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice -13- d'après un devoir

Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 42x + 5y = 3$

1/ Montrer que si (x_0, y_0) est une solution de (E) alors y_0 est divisible par 3.

2/ Soit (x_0, y_0) est une solution de (E) et $d = x_0 \wedge y_0$.

Quelle sont les valeurs possibles de d ?

3/a- Déterminer une solution particulière de (E) .

b- Résoudre (E) .

c- Déterminer les solutions (x, y) de (E) telles que $x \wedge y = 3$.

4/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = 0$

Exercice -14- bac