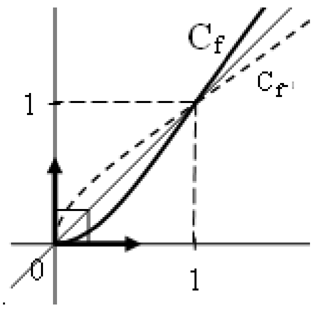
L. B. Monastir	**Série n : 70**	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre : Complexes + Similitude + éq. diff. + L.E.I + Espace+…		

Exercice -1- ♦

1/



L'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitéé par $C_{f^{-1}}$, C_f et les droites d'équation resxpectives x=0 et x=1 est égale à :

☐ 2 $\int_0^1 f(x)dx$ ☐ 2 $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ ☐ 1-2 $\int_0^1 f(x)dx$

2/ **E**=$\left\{M(z) \in P \,/\, \left|(z-1+i)^4\right| = \left|\left(i\overline{z}-2\right)^4\right|\right\}$ est :

☐ une demi droite ☐ une droite ☐ un cercle

3/

Exercice -2-

1/ **Enoncer la définition de deux suites adjacentes**.

2/ Enoncer le thérème des racines nièmes d'un nombre complexe non nul.

Exercice -3-

On considère les points A(i) et $B(-1)$.

Soit $f : P\backslash\{A\} \to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{1+z}{z-i}$.

1/ Soit le point C(z_C) tel que $z'_C = aff[f(C)] = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$.

Préciser la nature exacte du triangle ABC.

2/ Soit Δ l'ensemble des points M(z) tels que $\overline{z'} = \dfrac{1}{z'}$.

Prouver que Δ est la médiatrice du segment $[AB]$.

3/ Posons $z = x + iy$ avec $(x,y) \in IR^2$

a- Déterminer Im$[(1-i)z]$ en fonction de x et y.

b- Montrer que z' est réel si et seulement si $(1-i)z - (1+i)\overline{z} - 2i = 0$.

c- Soit D=$\{M(z) \in P$ tel que z' est un réel}. De ce qui précède déterminer une équation cartésienne de D puis préciser sa nature.

4/a- Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1,i\}$. On désigne par M d'affixe z et M'=$f(M)$ d'affixe z'.

Montrer que $\arg(z') \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)} \quad [2\pi]$.

b- Retrouver alors l'ensemble D.

Exercice -4- *d'après un devoir*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O,$\vec{u}$, $\vec{v}$).

On considère dans C l'équation (E) :$z^4 - 4az^2 + 2b = 0$; a∈IR,b∈IR.

1/a) Montrer que si z_0 est une solution de (E) alors $\overline{z_0}$ et $-z_0$ sont aussi solutions de (E) .

b) On suppose que l'équation (E) admet une solution z_0 qui n'est ni réelle r

Quelle est la nature du quadrilatère dont les sommets sont les images des solutions de (E)?

2/a) Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vérifier que $j^3 = 1$ et $j^2 = \overline{j}$.

Déterminer a et b sachant que j est une solution de l'équation (E).

b) Déterminer dans ce cas l'écriture exponentielle de chacune des solutions de (E) et placer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ leurs points images.

3/ On prend a=$\cos(2\theta)$ et b=2, avec $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

a) Résoudre dans C l'équation (E). Donner la forme exponentielle des solutions.

b) Mettre $z^4 - 4\cos(2\theta)z^2 + 4$ sous la forme d'un produit de deux trinômes de second degré à coefficients réels.

Exercice -5- ♦

Le plan est muni d'un repère orthonormé R=$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit l'hyperbole (H) : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

1/ Déterminer $T \cap (H)$ avec $T : y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

2/ T est -elle tangente à (H)?

3/ Soit le point I$(2;3)$. Déterminer les tangentes à (H) passant par I.

4/ Désignons par Δ et Δ' les asymptotes de (H) avec Δ celle qui contient des points de coordonnées positives.

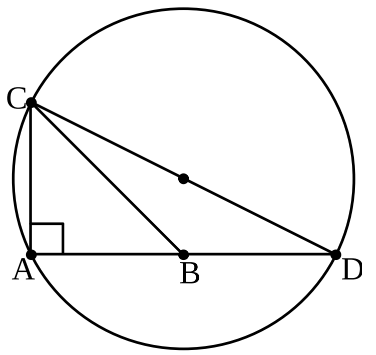
a- Montrer que $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ est un vecteur directeur de Δ et $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ est un vecteur directeur de Δ'.

b- Ecrire une équation cartésienne de (H) dans le repère R'=$(O, \vec{u}, \vec{v})$.

5/ Tracer la courbe (Γ) : $\frac{x^2}{4} - \frac{y|y|}{9} = 1$ dans R.

Exercice -6- *(d'après un devoir)*

On considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A et de sens direct, $D = S_B(A)$ $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[CD]$.



1/ On pose S la similitude directe qui transforme D en B et B en C.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Soit I le centre de S, montrer que le triangle BDI est isocèle et rectangle en D

c- Montrer que $\widehat{\left(\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$, en déduire une construction de I.

d- Déterminer et construire $A' = S(A)$, $C' = S(C)$ et $S(\mathcal{C})$.

2/ Soit $f = S_{(BC)} \circ S$.

a- Déterminer la nature et le rapport de f.

b- Soit J le centre de f, montrer que J est le symétrique de C par rapport à D.

c- Soit C'' l'image de C par f, montrer que B est le milieu de $[JC'']$ et déterminer $f((AC))$.

3/ On munit le plan complexe d'un repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$; déterminer la transformetion complexe associée à S, en déduire l'affixe de centre I.

Exercice -7- ♦

1/ Soit l'équation différentielle (E) : $-2y' = y + y^3$

a- Montrer que si y est une solution de (E) qui ne s'annule pas sur son domaine de définition D alors la fonction z=$\frac{1}{y^2}$ définie que D est une solution de de l'équation (E') : $z' = z + 1$.

b- Expliciter alors z(x) à une constante k près dont on précisera le signe.

c- Trouver alors la forme de y(x) solution de (E).

2/ Désignons par f la solution de (E) qui prend 1 en 0.

a- Prouver que f$(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2e^x - 1}}$ et préciser son domaine de définition D_f .

b- Vérifier que $\forall x \in D_f$ on a : $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(2e^x - 1)\sqrt{2e^x - 1}}$

c- Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice -8- *d'après un devoir*

A/ On considère la fonction f_n définie sur IR par :

$f_n(x) = (x - l)^n e^{2-x}$.

On note C_n la courbe de f_n dans un repère orthonormé (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$);

1. (**a**) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

(**b**) Dresser le tableau de variation de f_n.

(On distinguera 2 cas: n pair et n impair).

2. (**a**) Etudier la position relative de C_n et C_{n+1}.

(**b**) En déduire que toutes les courbes C_n passent par deux points fixes.

3. Construire C_2 et C_3 sur le même repère.

4. Montrer que $\forall$ x $\geqslant$1, on a: $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{1-n} n^n$.

B/ On pose $J_n = \dfrac{1}{n!} \int_1^2 (x - l)^n e^{2-x} dx$; n $\in IN^*$

1. (**a**) Montrer en intégrant par parties que $J_{n+l} = J_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

(**b**) Calculer J_1.

(**c**) En déduire que $J_n = e - \sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{k!}$.

(**d**) Montrer que $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$ et donner $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$ et calculer alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)$.

2. On pose $F(x) = \int_x^{x+1} \dfrac{e^{2-t}}{t-1} dt;$ x $\in]1; +\infty[$.

(**a**) Montrer que F est dénvable sur]1, $+\infty$[et que F'(x) $= \dfrac{-e^{1-x}[(e-1)x + 1]}{x(x-1)}$

(**b**) En déduire le sens de variation de F sur]1, $+\infty$[.

3. (**a**) Montrer que $\forall x \in]1, 2]$ et $\forall t \in \left[x;\ x+1\right]$ on a $\dfrac{e^{2-t}}{t-1} \geqslant \dfrac{e^{1-x}}{t-1}$

(**b**) En déduire que $F(x) \geqslant e^{1-x}(\ln(x) - \ln(x-1))$ et déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$.

Exercice 9

♦

1/ Pour tout entier naturel n on considère les fonctions F_n et G_n définies sur IR_+^* par $F_n(x) = \int_0^{\ln(x)} te^t(e^t - 1)^n$ dt et $G_n(x) = \int_1^x \ln(t)(t-1)^n$ dt

Montrer que $\forall x > 0;\ F_n(x) = G_n(x)$

2/ soit la suite (u_n) définie sur IN par $u_n = F_n(2)$

a) Montrer que $(n+1)u_n = \ln(2) - \int_1^2 \dfrac{(x-1)^{n+1}}{x} dx$.

b) Montrer que $\dfrac{1}{2(n+2)} \leqslant \ln(2) - (n+1)u_n \leqslant \dfrac{1}{n+2}$

c) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3/ $\forall x > 0;\ \forall n \in IN^*$ on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}[-(x-1)]^k$ et

$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$

a- Prouver que $v_n = \int_1^2 S_n(x)dx$

b- Vérifier que $S_n(x) = \frac{1}{x} - (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{x}$

c- Montrer alors que $v_n = \ln(2) - (-1)^{n+1}\int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx$

d- Déterminer enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice –10- (6 points)

On désigne par f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$ et par C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ du plan P.

1/**a**- Etudier la dérivabilité de f à droite en -1.

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Montrer que le point A d'abscisse 0 est un point d'inflexion de C_f.
Donner une équation cartésiènne de la tangente T à C_f en A.

d- Tracer C_f et T.

2/ Soit l'application R : P → P; $M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

Donner la transformé complexe de R puis déduire que R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

3/ Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = 1 - (\ln x)^2$. C_g est la courbe représentative de g dans $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

a- Calculer $\int_1^e g(x)dx$.

b- Montrer que $C_g = R(C_f)$.

c- Construire C_g dans le même repère.

4/ Soit D la région du plan limitée par C_f et les droites d'équations respectives $x = -1$; $x = 0$ et $y = e$. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de cette région D.

a- Montrer que $\mathcal{A}=(e-1) - \int_1^e g(x)dx$.

b- En déduire l'integrale $\int_{-1}^{0} e^{\sqrt{x+1}}dx$.