L. B. Monastir	Série n : 71	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		

Chapitre : Complexes + Isom + éq. diff. + L.E.I + Suite +…

♦ Exercice 1 ♦ Bac éq dif. Vrai - Faux

On considère les équations différentielles

(E) : y' -2y -1 = 0 (E'): y' -2y = 1-e^{x}

où y est une fonction définie et dérivable sur IR.

Dire, en le justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. (E) admet une fonction polynôme du premier degré comme solution.
2. Soit g une fonction positive définie sur IR; si g est solution de (E) alors elle est croissante sur IR.
3. La fonction $f : x \mapsto 3e^{2x} + \frac{1}{2}$ est une solution de (E).
4. La primitive F de f qui s'annule en 0 est une solution de (E').

♦ Exercice 2 ♦ *Bac*

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

1/a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b.

b) Vérifier que $b^2 = a$.

2/ Soit C le point d'affixe c=a+b.

a) Placer les points A, B et C.

b) Vérifier que $c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ :\ z^2 + z - c = 0$.

a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).

Montrer que d=$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i(-\frac{11\pi}{12})}$.

c) Placer alors le point D d'affixe d.

♦ Exercice 3 ♦ *d'après un devoir*

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre I tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et le point E tel que DBE est équilatéral direct de centre G.

1/ Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que R$(B) = A$ et R$(A) = D$. Caractériser R.

2/ Soit g=$r_{\left(B,\frac{\pi}{6}\right)} \circ r_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

3/ On pose $f = r_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$ et $h = f \circ g^{-1}$.

a- Déterminer h(C)

b- Caractériser h.

4/ Soit Δ une droite variable passant par A et distincte de (AC). On désigne par B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur Δ.

a- Déterminer $f(\Delta)$ et $f((DD'))$.

b- En déduire $f(D')$.

c- Montrer que le cercle de diamètre $[B'D']$ passe par un point fixe lorsque Δ varie.

♦ *Exercice 4* ♦

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 3x^2 - x + 2$

0,75 **1**/ Déterminer les réels a, b et c pour que le polynome $P{:}x \mapsto ax^2{+}bx{+}c$ soit une solution de (E).

0,5 **2**/ Résoudre l'équation (E') : $y' + 3y = 0$

0,5 **3**/**a**- Montrer que : f est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $(f - P)$ est solution de (E')

0,75 **b**- Résoudre alors (E)

4/ Soit l'équation différentielle (F) : $y'' + 3y' - 3x^2 + x - 2 = 0$

0,5 **a**- Vérifier que y est solution de (F) $\Leftrightarrow$ y' est solution de (E).

0,75 **b**- Déterminer alors la solution g de (F) vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = -2$

♦ *Exercice 5* ♦ extrait d'un bac

Soit la suite (u_n) définie sur IN par :$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^{u_n} - \ln u_n}; \forall n \in IN$

1/**a**- Montrer que $\forall x \in IR_+^*; e^x \geq 1$ puis en integrant déduire que $e^x \geq x + 1$

b- Montrer que $\forall x \in IR_+^*;\ \ln x \leq x - 1$

c- Prouver enfin que $\forall x \in IR_+^*; e^x - \ln x \geq 2$.

2/**a**- Montrer que $\forall n \in IN; 0 < u_n \leq 1$.

b- Prouver que (u_n) est strictement décroissante sur IN.

3/**a**- Montrer que $\forall n \in IN; u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.

b- Prouver alors que $\forall n \in IN; u_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

c- Trouver donc la limite de (u_n).

4/ A l'aide de **3**/**b**-, montrer que $\forall n \in IN;\ u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leq 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

♦ *Exercice 6* ♦ **Du bac Tn 2003**

1/ Dresser le tableau de variation de *f* : $[1;+\infty[\to IR; x \mapsto \dfrac{xLogx}{x+1}$

2/ Montrer que *f* réalise une bijection de [1;+∞[sur [0;+∞[.

3/ Soit n un entier naturel non nul.

a- Montrer que l'équation f$(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $[1,+\infty[$ une solution unique α_n.

b- Montrer que $f(\alpha_{n+1}) \leq f(\alpha_n)$. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est dédroissante.

c- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite quand $n \to +\infty$.

♦ *Exercice 7* ♦ extrait d'un bac

On définit dans IR la suite (u_n) par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = e^{2u_n-2}$

1. Soit g la fonction définie sur R par g (x) = $e^{2x-2.}$
   Démontrer que l'équation g (x)= x admet une seule solution a dans I=$\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$.
2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, on a : $|g'(x)| \leqslant \frac{2}{e}$
3. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, g (x) appartient à I.
4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - a|$
5. Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in IN$: $|u_n - a| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$
6. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
7. Déterminer un entier naturel p tel que : $|u_p - a| < 10^{-5}$.

♦ *Exercice 8* ♦

1/a- Trouver tous les couples (p,q) d'entiers relatifs vérifiant $7p - 5q = 2$.

b- En déduire les entiers relatifs x qui vérifient $\begin{cases} x \equiv -1 \quad [5] \\ x \equiv -3 \quad [7] \end{cases}$

2/ Soit l'entiers $N = a_n \times 6^n + a_{n-1} \times 6^{n-1} + a_{n-2} \times 6^{n-2} + \ldots + a_1 \times 6^1 + a_0$ avec $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n-2},\ \ldots a_1$ et a_0 sont des chiffres entre 0 et 5. On note que N est écrit encore sous la forme $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}$ dans la base 6.

a- Justifier que pour tout entier naturel k on a : $6^k \equiv 1 \quad [5]$ et $6^k \equiv (-1)^k \quad [7]$

b- Déduire que si N est divisible par 35 alors

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0 \equiv 0 \quad [5] \\ (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \ldots + a_2 - a_1 + a_0 \equiv 0 \quad [7] \end{cases}$$

3/ Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier $N = \overline{10x005y}$ dans la base 6 soit divisible par 35.

♦ *Exercice 9* ♦

Soient $n \in IN^*$ et $g_n : IR_+^* \to IR; x \mapsto x - 2n + nLogx$

1/a- Dresser le tableau de variation de g_n.

b- Montrer qu'il existe un unique réel α_n tel que $g_n(\alpha_n)$=0 et que $1 \leq \alpha_n \leq e^2$

c- Préciser le signe de $g_n(x)$ sur $]0,+\infty[$.

2/ L'unicité de α_n permet de définir une suite $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$.

a- Montrer que $Log(\alpha_n) = 2 - \frac{\alpha_n}{n}$.

b- Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et α_n. et déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

c- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = e^2$.

3/ Soit f la fonction définie sur IR_+^* par $f(x) = \frac{x - Logx}{\sqrt{x}}$.

a- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b- Montrer que $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$. Dresser le tableau de variation de f.

c- Construire la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (On donne $\alpha_1 \simeq 1,6$)

♦ *Exercice 10* ♦ D'après un devoir

Dans le plan orienté on considère un losange ABCD de centre O tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. On note I, J et K les milieux respectifs des segments

$[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$.

1/**a**) Identifier les deux isométries R=$S_{(DC)} \circ S_{(DJ)}$ et T = $S_{(OJ)} \circ S_{(DC)}$.

b) Montrer que f = T$\circ R$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

2/ Soit M un point du segment $[AB]$ et N un point du segment $[BC]$ tel que AM=BN et Q le point tel que IDNQ soit un parallélogramme.

a) Préciser R(M), en déduire f$(M) = Q$.

b) Donner la nature du triangle JMQ.

3/ Soit g l'isométrie du plan tel que g$(A) = D$, g$(B) = C$ et g$(D) = B$.

a) Montrer que g est un antidéplacement.

b) Montrer que g$(O) = J$ et g$(K) = O$ puis identifier $t_{\overrightarrow{JO}} \circ g$.

c) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

4/ On note $h = R^{-1} \circ g$ et $\varphi = S_{(AD)} \circ R^{-1} \circ g$.

Déterminer h(B) et h(K) puis identifier h et φ.

PROBLEME

Soit f la fonction définie par : f$(0) = 0$ et f$(x) = \dfrac{x}{1 - Logx}$ si x $\in IR_+^* \backslash \{e\}$.

I)**1**/ Mq f est continue en 0.

2/ Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter géométriquement le resultat.

3/ Mq $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

4/ Dresser le tableau de varaition de f.

5/ Tracer C_f la courbe de f dans un RON $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

6/ Soit $I = \int_0^1 f\ (x)dx$. Donner une interprétation géométrique de I.

II)**1**/ Etudier la position de C_f et Δ : $y = x$.

2/ Soit g la restriction de f sur [0,e[. Prouver que g réalise une bijection de [0,e[sur [0;+∞[.

3/ Déduire de **II**)**1**/, la position relative de $C_{g^{-1}}$ (courbe de g^{-1}) et Δ.

4/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = g^{-1}(u_n)$.

a- montrer que $\forall n \in IN$ on a $u_n \in [0, 1]$ et $u_{n+1} > u_n$.

b- Déduire que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

III) Pour tout $\lambda \in]0, 1]$ et pour tout n$\in IN^*$ on pose $J_n(\lambda) = \int_\lambda^1 x(Log(x))^n dx$ et $I_n = \lim\limits_{\lambda \to 0^+} J_n(\lambda)$.

1/ Calculer I_1 et en donner une interprétation géométrique.

2/ Mq $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} [\lambda^2(Log(\lambda))^n] = 0; \forall n \in IN^*$.

3/ Soit n $\in IN^*$.

a- Pout un $\lambda \in]0, 1]$, donner une relation entre $J_{n+1}(\lambda)$ et $J_n(\lambda)$.

b- Déduire que $I_{n+1} = -\dfrac{n+1}{2} I_n$.

c- Exprimer I_n en fonction de n.

4/ Pour n$\in IN^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$.

a- Soit $x \in]0, 1]$. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} (Log(x))^k = \dfrac{1 - (Log(x))^{n+1}}{1 - Log(x)}$.

b- En déduire que $I - S_n = \dfrac{1}{2} + \int_0^1 (Log(x))^{n+1} f(x)dx$.

IV) On pose $\psi(x) = \int_x^{e^2} f(t)dt$ pour x$\in [e^2; +\infty[$.

1/ Justifier la dérivabilité de ψ sur $[e^2; +\infty[$.

2/ Préciser le sens de variation de ψ.

3/ Mq $\forall x \in [e^2; +\infty[, \psi(x) \geq e^2 x - e^4$.

4/ Dresser le tableau de variation de ψ.