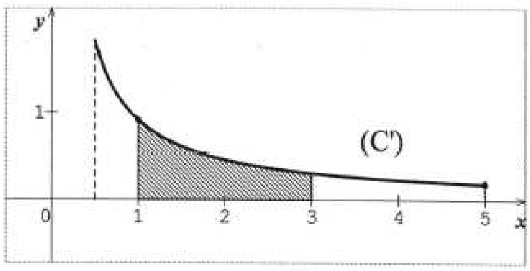
L. B. Monastir	Série n : 72	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre : Complexes + simili. + Arithm + L.E.I + Suite +…		

♦ *Exercice 1* ♦ Bac 2012 p- 4 M

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[\frac{1}{2}, 5]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points A(1,0) et B(3, 1). Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f ' de la fonction f.



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1.

2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.

3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

4) Pour tous a et b de [1,3], $|f(b)-f(a)| \le |b-a|$.

♦ *Exercice 2* ♦

EXERCICE N°4 (4 pts)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul

1) On considère l'équation notée (E) : $3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs

a-/ Déterminer un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que 3 u + 7 v = 1

En déduire une solution particulière (x_0 , y_0) de l'équation (E)

b-/ Déterminer alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation (E).

2) On considère l'équation notée (G) : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs

a-/ Montrer que $100^n \equiv 2^n \pmod 7$

b-/ Démontrer que si (x, y) est solution de G alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod 7$

c-/ Reproduire et compléter le tableau suivant :

Le reste modulo 7 de x	0	1	2	3	4	5	6
Le reste modulo 7 de $3x^2$							

d-/ Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7

En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

♦ *Exercice 3* ♦ D'après un devoir

On donne l'équation (E_θ) : $z^2 - (1+i)e^{i\theta}.z + ie^{2i\theta} = 0$ *avec* $\theta \in [0, 2\pi]$

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

B) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

On considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = ie^{i\theta}$

1°) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle

2) On pose $Z = z_1 + z_2$.

a) Donner le module et un argument de Z

b) En déduire les valeurs éxactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$

c) Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$

i) Montrer que que lorsque θ varie dans $[0,2\pi]$ le point I décrit un cercle (C) que l'on précisera

ii) Montrer que (M_1M_2) est tangente à (C).

3°) On suppose que $\theta \in [0;\pi]$

a) Montrer que $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{M_1M_2}\right)} \equiv \theta + \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$

b) En déduire la valeur de θ pour la quelle la droite (M_1M_2) est parallèle à l'axe $(O,\vec{v})$.

c) Placer les points M_1 et M_2 pour la valeur trouvée de θ.

d) Soit A le point d'affixe $z_A = 1+ i$, calculer l'aire du triangle AM_1M_2.

Exercice 4 : (6 pts)

Soit AFED un carré de coté 4 cm tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et I les symétriques respectifs de A et O par rapport à (EF).

1) a) Soit R la rotation définie par R (F) = E et R (E) = D.Préciser l'angle et le centre de R.

b) Soit $f = R \circ S_{(OI)}$ où $S_{(OI)}$ est la symétrie orthogonale d'axe(OI). Montrer que $f = S_{(OE)}$

2) Soit $R' = t_{\overrightarrow{OI}} \circ R^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{OI}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$ et R^{-1} désigne la réciproque de R.

a) Déterminer les images de O,F et E par R'.

b) Déduire que R' est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3) On pose Δ la médiatrice du segment [AF] et soit $g = S_{(AD)} \circ S_\Delta \circ S_{(OI)}$.

a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b) Soit M un point du plan.
Montrer que g(M)= R'(M) si et seulement si f(M)=M

c) On déduire l'ensemble des points M tel que g(M)= R'(M).

♦ *Exercice 4* ♦ D'après un devoir

On cosidére dans le plan orienté un losange ABCD de centre O tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

1)a) Montrer que si f est une isométrie qui laisse globalement invariant le losange ABCD alors f fixe le point O.

b) Déterminer alors les quatre isométries qui laissent globalement invariant le losange ABCD.

2)a) Donner la nature et les éléments carartéristiques des isométries suivantes :
$f_1 = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et $f_2 = S_{(CD)} \circ S_{(CA)}$.

b) Carctériser alors l'isométrie $g = r_{\left(C,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$.

3°) On note E , F , et G les symétriques respectiques des points A , D et C par rapport au point B. Soit h l'isométrie telle que : h(A)= E , h(B)= F et h(D)= B .

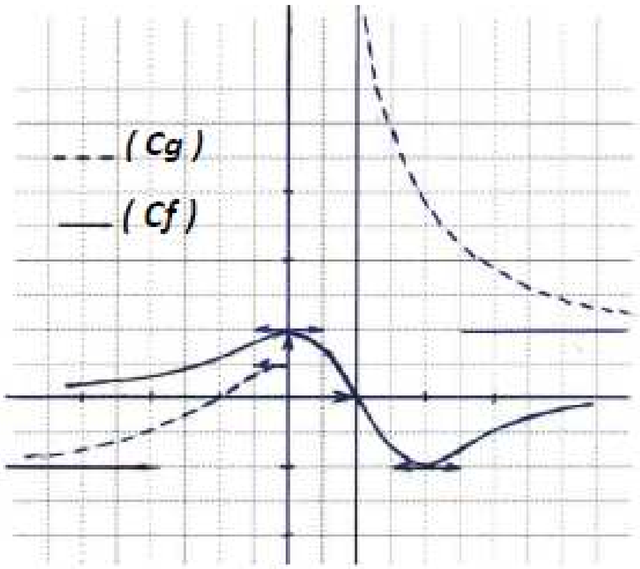
a) Montrer que h n'admet aucun point fixe .

b) En déduire que h est une symétrie glissante.

c) Montrer que $S_{(BD)} \circ h = t_{\overrightarrow{DB}}$.

d) Donner alors l'axe et le vecteur de h.

♦ *Exercice 5* ♦ D'après un devoir



On tracé ci-contre dans le plan muni d'un repère orthonormé ,
les courbes (Cf) et (Cg) de deux fonctions f et g . On pose : h = g o f .

1)a) Déterminer l'image de] - ∞ ; 1 [par f .

b) Justifier que h est définie sur [1 ; + ∞ [

2) Résoudre graphiquement : h (x) = 0.

3) Calculer : h (1) ; h' (2) et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

4) Dresser le tableau de variation de h .

5) Soit l'équation (E) : h (x) = $\frac{1}{n}$ où n ∈ IN et n ⩾ 3 .

a) Montrer que (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n tels que : $a_n \in]\,1\,;\,2\,[$ et $b_n > 2$.

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante .

c) Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

♦ *Exercice 6* ♦ (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA = 2 OC et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On pose I = O * A , J = B * C et L = I * J

La perpendiculaire menée de I à la droite (OB) rencontre (BC) en un point D

Soit S la similitude directe telle que S(O) = I et S(A) = J

1°) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S.

2°) Déterminer S(B) en utilisant les images des droites (OB) et (AB) par S.

3°) Construire alors le point E = S(C)

4°) Soit Ω le centre de S

a-/ Montrer que $S \circ S = h(\Omega, -\frac{1}{4})$.

b-/ Montrer que $S \circ S(O) = L$. en déduire que $\Omega \in (OL)$

c-/ Soit H = I * D. Montrer que $S \circ S(I) = H$. En déduire que $\Omega \in (IH)$ et construire Ω.

5°) Soit σ la similitude indirecte de centre Ω et telle que $\sigma(I) = O$.

a-/ Déterminer le rapport de σ.

b-/ Construire l'axe (Δ) de σ.

c-/ Soit K le symétrique de Ω par rapport à I.

Montrer que (Δ) est la médiatrice du segment [OK].

♦ *Exercice 7* ♦ .

1) *Calculer l'intégral :* $\ell = \int_1^2 \ln(t)\,dt$.

2) *Soit* $n \in IN^*$ *, Montrer que pour tout entier k , tel que* $0 \le k \le n-1$ *on a :*

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(t)\,dt \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

3) *Soit la suite* (J_n) *définie sur IN* par :* $J_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

a) *Montrer que pour tout* $n \in IN^*$ *on a :* $J_n - \frac{1}{n}\ln(2) \le \ell \le J_n$.

b) *Montrer que la suite* (J_n) *converge vers* ℓ .

♦ *Exercice 8* ♦

1) a) *Déterminer le reste modulo 13 de* 5^4 .

b) *En déduire les restes modulo 13 de chacun des entiers* 5^{4k}, 5^{4k+1}, 5^{4k+2} *et* 5^{4k+3} *avec* $k \in IN$

c) *Déterminer alors le reste de la division euclidienne par 13 de :* $a = 1318^{2012} + 91^{2011}$.

d) *Déterminer les entiers naturels n tels que :* $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$.

2) *Soit la suite* (U_n) *définie sur IN* par :* $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} 5^k = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{n-1}$.

a) *Montrer que pour tout* $n \in IN^*$, $4U_n = 5^n - 1$.

b) *Montrer que* U_{2012} *est divisible par 13* .

c) *En utilisant la question* **1) b)** *déterminer suivant les valeurs de n les restes modulo 13 de* U_n

♦ *Exercice 9* ♦ (*PROBLEME*) *D'après un bac*

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR* par : f(x) $= \frac{e^{-x}}{x}$

1) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition .

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O,$\vec{u}$,$\vec{v}$).

a. Etudier les branches infinies de (C).

b. Tracer la courbe (C).

Partie B

Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 1$ et pour tout n de IN ,

$$u_{n+1} = u_n^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n}.$$

1) Montrer que pour tout x $\in IR$; $e^x \geqslant x + 1$.

2) En déduire que : pour tout x $>$ 0, x^2f(x) $\leqslant \frac{x}{x+1}$.

3) Montrer alors que pour tout n $\in$ IN , 0 $<$ $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie C

Soit la fonction définie sur [0,+∞[par

$F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t)dt$ pour x >0 et $F(0) = 2\ln 2$

1) Prouver que pour tout x $>$ 0 , F(x) $\leqslant$ 2ln(2).

2)**a**- En utilisant B)1) montrer que pour tout $t > 0, \quad -t \leqslant e^{-t} - 1 \leqslant 0.$

b- Montrer que pour tout x $>$ 0 , $-3x^2 \leqslant F(x) - 2\ln(2) \leqslant 0.$

c. En déduire que F est continue et dérivable à droite en 0 .

3)**a**. Montrer que pour tout t $\geqslant$ 1, f(t) $\leqslant$ e^{-t}.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}$ F(x).

4)**a**. Montrer que F est dérivable sur]0;+∞[et calculer F'(x).

b. Dresser le tableau de variation de F .

c. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.