L. B. Monastir	**Série n : 73**	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre : Complexes + simili. + Arithm + L.E.I + Suite +…		

♦ *Exercice 1* ♦ Choisir la bonne réponse

1/ (bac Tn 2008) Soit n un entier naturel tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7)=35$.
alors : P_1: n $\equiv 0 \pmod 3$ P_2: n $\equiv 0 \pmod 5$ P_3: n $\equiv 0 \pmod 7$

2/ Si x est une solution de l'équation $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ alors
P_1 : $x \equiv 1 \pmod 4$ P_2 : x est un multiple de 2
P_3 : x est un entier pair.

3/ L'équation $31x \equiv 1 \quad [2013]$
P_1 : n'admet pas de solution dans $\{1,2,3,\dots,2013\}$
P_2 : admet une seule solution dans $\{1,2,3,\dots,2013\}$.
P_3 : admet au moins deux solutions dans $\{1,2,3,\dots,2013\}$.

♦ *Exercice 2* ♦ *bac Inde 2002*

1. Calculer le PGCD de 4^5 - 1 et de 4^6 - 1.
2. Soit u la suite numérique définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, $\forall$ n$\in IN$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.
   Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u.
3. (a) Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, le PGCD de u_n et u_{n+1}.
4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$
   (a) Montrer que v est une suite géométrique dont on d´eterminera la raison et le premier terme v_0.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD de 4^{n+1} - 1 et de 4^n - 1.

♦ *Exercice 3* ♦ Bac Tn

1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation:
$(1+i)z^2 - 2z + 1 - i = 0$

2/ Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $mz^2 - 2z + \overline{m} = 0 \quad (E)$
où $\overline{m}$ est le nombre complexe conjugué de m.

3/ Dans toute la suite on prend $m = \sqrt{2}\, e^{i\alpha}$ où α est un réel.

a- Montrer que les racines z' et z" de l'équation (E) s'écrivent sous la forme : z'$=e^{i(\frac{\pi}{4}-\alpha)}$ et z"$=e^{-i(\frac{\pi}{4}+\alpha)}$

b- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$
On désigne par M' et M" les points d'affixes respectives z' et z" et par M le point d'affixe z'+z". Montrer que $\frac{z'}{z''} = i$. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont orthogonaux.

c- Montrer que le quadrilatère OM'MM" est un carré.

♦ *Exercice 4* ♦

$\theta \in]0,\pi[$. Soit l'équation $E_\theta : z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = 0$.
Désignons par z_1 et z_2 les solutions de E_θ.

1°) Montrer; sans résoudre E_θ; que $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

2°)**a** – Vérifier que $(-1)^2 - [2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta] = \left(e^{i\theta}\right)^2$

b- Résoudre E_θ.

3°) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

4°) Soit $\Gamma_1 = \{M_1(z_1)$ quand θ varie sur $]0,\pi[\}$.

Caractériser géométriquement l'ensemble Γ_1.

♦ *Exercice 5* ♦ . Centres ´etrangers, Juin 2005 (5 points)

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.

On suppose que N = a^2 - b^2 o'u a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la mˆeme parit´e.
2. Montrer que N peut s'´ecrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parit´e de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a ; b) vérifiant la relation

(E) : a^2 - 250 507 = b^2.

1. Soit X un entier naturel.
   (a) Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
   (b) Sachant que a^2 - 250 507 = b^2, déterminer les restes possibles modulo 9 de a^2 - 250 507 ; en déduire les restes possibles module 9 de a^2.
   (c) Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors a > 501. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501 ; b).
3. On suppose que le couple (a ; b) vérifie la relation (E).
   (a) Démontrer que a est congru 'a 503 ou 'a 505 modulo 9.
   (b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple (505+9k ; b) soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une ´ecriture de 250 507 en un produit de deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

❖ Exercice N°4 : (5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$, l'équation : 7x - 13y = 1 (E).

2) On considère dans $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$, l'équation : 7x - 13y = - 4 (E').

a) Vérifier que le couple (5 , 3) est une solution particulière de (E').

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$, l'équation (E').

3) Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 5 \pmod{13} \\ n \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$

a) Montrer que le système (S) est équivaut à (S') : $\begin{cases} 7n \equiv 35 \pmod{91} \\ 13n \equiv 39 \pmod{91} \end{cases}$

b) En déduire qu'un entier n est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv 31 \pmod{91}$.

4) Pour tout entier n, on pose a = 13n - 8 et b = 7n - 4 .

a) Montrer que le couple (a , b) est une solution de l'équation (E').

En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels $a \wedge b = 2$.

♦ *Exercice 7* ♦

♦ Exercice 8 ♦ *d'après devoir de Raouf*

A) Soit la fonction f définie sur IR par : f(x)=xe^{x-1} et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormée (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1)a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées

c) Déterminer une équation de la tangente (T) au point O

2) Construire (T) et (C).(On précisera en particulier les branches à l'infini)

3)a) Calculer l'intégrale A $=\int_0^1 f(t)dt$

b) Soit a un réel strictement négatif. Calculer l'intégrale A(a) $=\int_0^a f(t)dt$

c) En déduire que $\lim\limits_{a\to-\infty}$ A(a)= A

B) On définit les suites (U) et (V) respectivement par :

Pour tout n de IN* , $u_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}dx$ et $v_n=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k - Log(n+1)$

1)a) Calculer u_1, et u_2.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

c) Montrer que pour tout n de IN* , $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

d) En déduire que (u_n) est convergente puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) a) Au moyen d'une double intégration par parties : Montrer que pour tout n de IN* , $u_n = \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{u_{n+2}}{(n+l)(n+2)}$

b) En déduire que pour tout n de IN* ,

$\dfrac{1}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ par la suite : $\int_{n+2}^{n+3}\dfrac{dx}{x} \leqslant u_n \leqslant \int_{n}^{n+1}\dfrac{dx}{x}$

c) Montrer alors que pour tout n de IN* , $\ln(\dfrac{n+3}{n+1}) - \ln(3) \leqslant v_n \leqslant 0$

3)a) Montrer alors que pour tout n de IN* , $v_{n+l} - v_n = u_{n+l} - \int_{n+1}^{n+2}\dfrac{dx}{x}$

b) En déduire que (v_n) est monotone sur IN*.

c) Montrer alors que (v_n) est convergente vers un réel L vérifiant $(-ln(3)) \leqslant L \leqslant 0$

♦ Exercice 9 ♦ (PROBLEME) *D'après un bac*

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR* par : f(x) $=\dfrac{e^{-x}}{x}$

1) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition .

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O,$\vec{u}$,$\vec{v}$).

a. Etudier les branches infinies de (C).

b. Tracer la courbe (C).

Partie B

Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 1$ et pour tout n de IN ,

$u_{n+1} = u_n^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n}$.

1) Montrer que pour tout x $\in IR$; $e^x \geqslant x+1$.

2) En déduire que : pour tout x > 0, x^2f(x) $\leqslant \dfrac{x}{x+1}$.

3) Montrer alors que pour tout n ∈ IN , $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie C

Soit la fonction définie sur [0,+∞[par $F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t)dt$ et $F(0) = 2\ln 2$

1) a. Prouver que pour tout x > 0 , F(x) ⩽ 2ln(2).

b. En utilisant B)1) montrer que pour tout $t > 0, \quad -t \leqslant e^{-t} - 1 \leqslant 0$.

2) a. Montrer que pour tout x > 0 , $-3x^2 \leqslant F(x) - 2\ln(2) \leqslant 0$.

b. En déduire que F est continue et dérivable à droite en 0 .

3)a. Montrer que pour tout t ⩾ 1, f(t) ⩽ e^{-t}.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4) a. Montrer que F est dérivable sur]0;+∞[et calculer F'(x).

b. Dresser le tableau de variation de F .

c. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

♦ *Exercice 10* ♦

Dans le plan orienté on considère un carre ABCD de centre I et de sens direct . on désigne par J et K les milieux respectifs des cotés [AD] et [CD] , soit E le point du plan tel que DBE soit un triangle équilatéral de sens direct

1/ On pose $\Psi = t_{\overrightarrow{BC}} o S_{(AC)}$

a- Déterminer $\Psi(A)$ et $\Psi(B)$.

b- En déduire que Ψ est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

2/**a**- Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoi B sur A et A sur D.

b- Caractériser R.

3/ On pose g=$R_{(B,\frac{\pi}{6})} o R_{(E,\frac{\pi}{3})}$. Caractériser g.

4/ Soit r=$R_{(I,\frac{\pi}{2})}$ et on pose $t = g \circ r^{-1}$

a- Déterminer t(A) puis caractériser t.

b- Pour tout M du plan , on pose $M_1 = r(M)$ et et $M_2 = g(M)$.

quelle est la nature de quadrilatère ABM_2M_1.

♦ *Exercice 11* ♦

•

Soit $OABC$ un carré de centre I tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; E est le point du segment $[OC]$ tel que $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$; F le symétrique de E par rapport à la médiatrice Δ de $[OC]$ et Δ' la droite perpendiculaire à (OC) en E. (sur la figure $OA = 6\ cm$)

1/ Soit $t = S_\Delta \circ S_{\Delta'}$.

a- Montrer que t est une translation.

b- Déterminer $t(E)$. En déduire le vecteur de t.

2/ Soit f la similitude directe de centre E qui envoie I en A.

On suppose le plan est rapporté au repère direct $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)$.

a- Déterminer la transformé complexe associée à f.

b- Montrer que f est de rapport 2 et d'angle θ tel que $tg\theta = -\frac{3}{4}$.

3/ Soit $g = S_\Delta \circ h_{(O;2)}$

a- Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b- Déterminer $g(I)$.

c- Soit J le milieu du segment $[AE]$. Montrer que g est d'axe D la médiatrice de $[IJ]$.

d- Prouver que $h_{(O;2)} \circ h_{(E;½)} = t$. En déduire que $D = \Delta'$.