Exercice -1- D'après un devoir

1/ Dans un magasin, le nombre anuel de ventes d'appareil éléctroménager, relevé pendant 6 année, est donné par le tableau suivant :

année	1996	1997	19998	1999	2000	2001
rang de l'année x	1	2	3	4	5	6
Nombre d'appareil y	623	712	785	860	964	1073

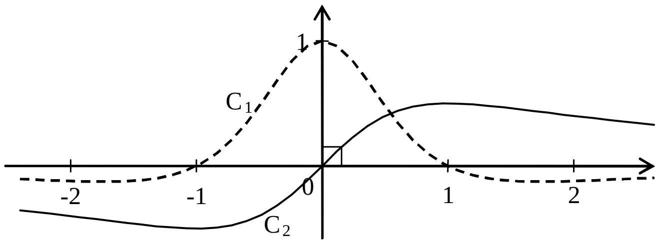
a- La covariance de (X, Y) est égale à a $255,75$ b $256,75$ c $257,75$

b- Une estimation par la méthode de moindres carrées du nombre d'appareils vendus en 2005 est environ: a 1408 b 1050 c 1415

2/ Soit f une fonction deux fois dérivables sur IR et vérifiant $f(0) = -1$ et $f(1)=1$

L'intégrale $I=\int_{-1}^{0} f'(-x)dx =$ a -2 b 0 c 2

3/ Dans la figure ci-dessous les courbes représentatives d'une fonction f et celui de sa dérivée f'.



☐ La courbe de f est C_1 et C_2 de f'. ☐ La courbe de f' est C_1 et C_2 de f.

4/ A, B et C sont trois tels que $\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| = AB \times AC.$

☐ A, B et C sont alignés ☐ ABC est un triangle équilatéral

☐ ABC est un triangle rectangle

Exercice -2- Bac 2009 session principale section Sc. exp

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1) Toute suite croissante et bornée est convergente.

2) La suite (U_n) définie sur IN* par $U_n= (-1)^n\sin(\frac{1}{n})$ n'admet pas de limite.

3) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle] - 1, 1 [et telle que $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$.

L'équation f(x) = 2009 admet une solution unique dans l'intervalle] - 1, 1 [.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-x}-x^2)=-\infty$

5) Soit f une fonction continue sur IR . Si pour tout $x \in [2, 3]$, $2 \leqslant f(x) \leqslant 3$ alors $2 \leqslant \int_2^3 f(x)dx \leqslant 3$.

6) Toute fonction f continue sur [a, b] et telle que $\int_2^3 f(x)dx \geqslant 0$ est une fonction positive sur [a, b].

Exercice -3-

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad 2^{3n+2} + 3^n \equiv 0 \pmod 5$

2) a) Déterminer suivants les valeurs de n le reste de 7^n modulo 10

b) En déduire le chiffre des unités du nombre $7^{48} + 7^{50} + 7^{51}$

3) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ $\quad 4x \equiv 0 \pmod 6$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\quad n^3 \equiv n \pmod 6$

c) Déterminer alors les entiers n tels que $38\,n^3 + 2\,n \equiv 0 \pmod 6$

Exercice -4-

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct R.

1/ Déterminer l'ensemble (E) : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

2/ Soit $M(x_0,y_0)$ un point de (E), F le foyer de (E) d'abscisse positif et Δ la directrice associée à F.

a- Déterminer le point I d'intersection de Δ et T la tangente à (E) en M.

b- Montrer que FIM est un triangle rectangle.

c- Déduire une construction simple de T.

3/ Soit S la similitude directe de centre $A'(-3)$ et qui transforme O en $B(2i)$

a- Déterminer la transformée complexe associée *à* S.

b- Soit $(E') = S((E))$. Montrer que (E') est une ellipse.

c- Construire (E) et (E').

Exercice -5- d'après un devoir

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ on considère

l'application $\begin{cases} f : \ P \to P \\ \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z') \text{ tel que: } z'=(-1+i)\overline{z}+1 \end{cases}$

1. Prouver que f est une similitude indirecte.
2. Donner les éléments caractéristiques de f.
3. On pose $B(1)$ et $C(i)$ et σ la similitude directe tel que $\sigma(O)=B$ et $\sigma(B)=C$.

a- Déterminer l'application complexe associée à σ.

b- Déterminer l'affixe du centre de σ.

4- on pose $\varphi = f \circ \sigma^{-1}$. Montrer que φ est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

Exercice -6- d'après un devoir

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère la droite D d'équation x=1, le plan F$(4,0)$ et un point variable S$\left(m+1;\ 0\right)$ avec 0<m<3.

(C_m) désigne la conique de foyer F, de directrice D et dont S est un sommet de l'axe focal.

1/**a**) Exprimer en fonction de m l'excentricité e de (C_m).

b) Déterminer en fonction de m la nature de (C_m).

Pour la suite de l'exercice on suppose de m=1 et on note $(H) = (C_1)$.

2/**a**) Montrer que (H) est une hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1.$

b) Préciser les asymptotes de (H) puis tracer (H).

3/ Soit M$(x_0;y_0)$ un point de (H) non citué sur l'axe focal. La tangente T à (H) en un point coupe D en un point Q.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FQ}$.

b) En déduire une construction géométrique de la tangente T à (H) en M d

Exercice -7- d'après un devoir

Dans le plan orienté on considère le carré direct AKJI de centre O et on désigne par C et B les symétrique de A respectivement par rapport à I et K.

1. faire la figure.

2. On pose : $f = h_{(A,2)} \circ t_{\overrightarrow{IA}}$.

Déterminer f(C) puis caractériser f.

3. Soit g la similitude indirecte qui transforme A en I et B en J.

a- Déterminer les images par g des droites : (KJ) et (BJ).

b- En déduire que g(J)=O.

4.a- Montrer que g admet un centre qu'on notera Ω.

b- Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés : (O,4) et (B,-1) puis construire Ω.

5. On désigne par Δ la médiatrice de [AI], on pose : $\psi = h_{(A,-2)} \circ S_{\Delta}$.

a- Montrer que $\psi = f \circ S_{(AI)}$

b- Donner la nature et les éléments caractéristiques de ψ.

Exercice -8- bac Tn 2005

1) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^3e^{1-x^2}$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Construire la courbe $\mathcal{C}$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur IN^* par : $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2}dx$.

a- Calculer u_1.

b- Montrer que pour tout n de IN^* on a : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

3)**a**- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de IN^* on a : $u_{n+2} = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)u_n - \dfrac{1}{2}$.

b- En déduire l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Exercice -9- bac 1998 Tn s. controle

1)**a**- On lance un dé truqué dont les faces sont respectivement numérotées de 1 à 6.Sachant que la probabilité d'apparition du numéro 6 est $\frac{1}{3}$ et que les autres numéros ont la même probabilité d'apparition, calculer la probabilité d'apparition pour chacun des numéros de 1 à 5

b- On lance aussi une pièce de monnaie truquée. Sachant que la probabilité d'apparition de la face "Pile" est $\frac{2}{5}$,calculer la probabilité d'apparition de l'autre face.

2) On lance simultanément le dé et la pièce de monnaie et on désigne par X l'aléa numérique défini comme suit :

- Si la face " Pile " apparaît en même temps qu'un numéro impair du dé alors X =0.
- Si la face " Pile " apparaît en même temps qu'un numéro pair du dé alors X = 1.
- Si la face " Face " apparaît alors X prend pour valeur le numéro apparu sur le dé.

Déterminer la loi de probabilité de X.

3) On répète l'épreuve précédente trois fois de suite et on désigne par Y le nombre de fois où l'on obtient X ≥ 5.

a- Calculer P(Y = 2).

b- Calculer l'espérance mathématique de Y ainsi que sa variance.

Exercice -10-   (4 points)

Une entreprise fabrique des calculatrices. Un contrôle de qualité a montré que chaque calculatrice fabriquée par cette entreprise pouvait présenter deux types de défauts indépendants a et b.
Une calculatrice est dite défectueuse si elle présente au moins l’un des deux défauts. On considère les deux événements suivants:

A:« une calculatrice fabriquée présente le défaut a»
B:« une calculatrice fabriquée présente le défaut b»
D:« une calculatrice fabriquée est défectueuse »

On suppose que les probabilités de A et B sont : p$(A) = 0,01$ et p$(B) = 0,03$.

1/**a**- Calculer p$(A \cap B)$.
b- Prouver que p$(D) =$ 0,0397.

2/ Un commerçant passe une commande de 10 calculatrices.
Calculer la probabilité p_1 que trois calculatrices dans cette commande soient défectueuses.

3/ Un commerçant exige que sur une commande d’un nombre n de calculatrices, la probabilité d’avoir au plus $(n - 1)$ calculatrices défectueuses reste inférieure à 0,1. Déterminer le nombre maximum de calculatrice que le commerçant peut commander.

4/ On admet que la durée de vie T en année d’une calculatrice de cette entreprise suit une loi exponentielle de paramètre λ.
a- Déterminer, à 10^{-2} près, la valeur de λ sachant que p$(T \geqslant 10) = 0,7$.
b- Calculer la probabilité qu’une calculatrice de cette entreprise dure entre 6 mois et 7 ans.
c- Tu as trouvé une calculatrice de cette entreprise **déjà utilisée**.
Quelle est la probabilité qu’elle reste encor en marche au plus1 ans?

Exercice 11   (8,5 points)

Soit $f : IR \to IR; x \mapsto \ln(e^x + 1)$. C_f est la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.(unité graphique 2 cm).

I/ **1**/**a**- Prouver que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à C_f.
b- Etudier la position relative de C_f et Δ.
2/ Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f.

II/ Soit g la fonction dérivable sur définie par : $g(x) = f(x) - x;\ \forall x \in IR$
1/ Préciser le sens de variation de g.
2/**a**- Montrer que $\forall t \in IR^+;\ \ln(1 + t) \leq t$.
b- Déduire que $\forall x \in IR;\ g(x) \leq e^{-x}$.

III/ Soient les suites (u_n) et (S_n) définie sur IN par $u_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$
$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
1/**a**- Montrer que $\forall n \in IN;\ g(n+1) \leq u_n \leq g(n)$
b- Conclure que (u_n) est décroissante.
2/**a**- A l’aide de **II**/**2**/ montrer que $\forall n \in IN; 0 \leq u_n \leq e^{-n} - e^{-n-1}$.
b- Déduire que (u_n) converge et préciser sa limite
3/**a**- Prouver que $\forall n \in IN; S_n = \int_0^{n+1}(f(x) - x)dx;$ donner donc une interprétation géométrique de S_n.
b- Etudier la monotonie de (S_n).
c- Montrer que (S_n) est convergente (on pourra profiter de **II**/**2**/).

Exercice -12-   Bac

1/ Résoudre l’équation différentielle $(E_1) : y'' + y = 0$

2/ Soit l’équation différentielle $(E_2) : y'' + \dfrac{1}{x^4}y = 0$.

a- Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables sur IR_+^* telles que $f(x)$=x (1)

Montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si g est solution de (E_2).

b- En déduire les solutions de (E_2).

3/ Calculer alors l'intégrale $I = \int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x} dx$.

Exercice -13- Bac Liban 2003

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur sin par

$$\begin{cases} x_0 = 3;\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1;\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1/ Démontrer par récurrence sur n, que $x_n = 2^{n+1} + 1$

2/**a**- Calculer $x_8 \wedge x_9$, puis $x_{2002} \wedge x_{2003}$.. Que peut-on en déduire pour ces couples de nombres ?

b- x_n et x_{n+1} sont ils premiers entre eux pour tout entier n ?

3/**a**- Démontrer que pour tout n, $2x_n - y_n = 5$. En déduire y_n en fonction de n.

b- Etudier, suivant les valeurs de l'entier p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

c-On pose $d_n = x_n \wedge y_n$; démontrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$. En déduire l'ensemble des entiers n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice -14- §§§§§§§§§§ ////////////

Lespace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}; \vec{k}\right)$. On considère les points $A(2,1,-1)$ et $B\left(5,\ 1,-4\right)$ et les droites Δ et D définies par :

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 1 \\ z = -1 + \alpha \end{cases} ;\ \alpha \in IR \text{ et } D : \begin{cases} x = -3 + 2\beta \\ y = -\beta \\ z = 2 + \beta \end{cases} ;\ \beta \in IR.$$

1/**a**- Vérifier que $\Delta = (AB)$.

b- Donner deux points distincts E et F de D.

c- Prouver que Δ et D ne sont pas coplanaires.

2/ Soit Q un plan contenant Δ et parallèle à D.

a- Prouver que $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{EF}$ est un vecteur normal à Q.

b- Donner alors une équation cartésienne de Q.

3/ Soit $(P) : -3x + y + 7z + 1 = 0$. Vérifier que P est parallèle à Q.

4/ On note S_A la sphère de centre A et de rayon $r_A = \sqrt{29}$ et et S_E la sphère *de centre E* et de rayon r.

a- Montrer que S_A est tangente à D.

b- Déterminer r de façon que S_E soit tangente à Δ.

c- Montrer que $S_A \cap P$ est un cercle dont on précisera le rayon r'.

Exercice -15-

Dans l'espace E muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}; \vec{k}\right)$, on considère le plan $P : P : x + 2y - z - 4 = 0$ et l'ensemble S= {M$(x,y,z) \in$ E / $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 4y - 8z + 6 = 0$ }.

1/ Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

2/ Vérifier que $H(-1,3,1)$ est un point commun de S et P.

3/ Déterminer la position relative de S et P.

4/ Soit Δ la droite passant par le point $A(1,0,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + a\vec{k}$ avec a un réel.

a- Déterminer la valeur de a sachant que Δ est parallèle à P. On prendra la valeur trouvée pour le reste de l'exercice.

b- Soit C un point de la droite d'intersection de P et le plan perpendiculaire à P contenant Δ. Soit B un point de Δ tel que aire de ABC est égal à 2009. Calculer AB.

5/a- Soit S' l'image de S par la translation T de vecteur $\vec{u}$. Déterminer une équation cartésienne de S'.

b- Montrer que S' est une sphère tangente à P et préciser le point H' de contact de S' et P.

Exercice -16-

Le plan P est muni d'un repère orthonormé R=$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ Soit l'ensemble (E) : $y^2 = \frac{9}{4}(4-x^2)$

a- Déterminer la nature de (E).

b- Préciser les sommets de (E) puis le construire dans R.

2/ Soit $G : [0;\pi] \to IR; x \mapsto G(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}\,dt$.

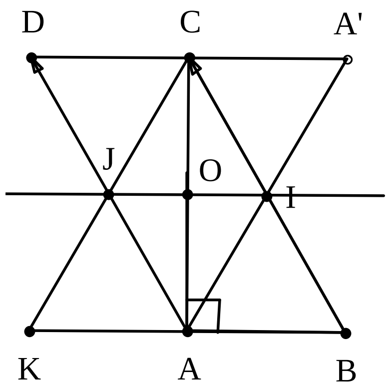
a- Calculer $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et montrer que $\forall x \in [0;\pi];\ G'(x) = -4\sin^2 x$

b- En déduire l'expression de $G(x)$ en fonction de x.

3/a- Hachurer sur votre figure la partie (D) du plan limitée par (E) et les demi droites d'équation respectives $\begin{cases} x=0 \\ y\geqslant 0\end{cases}$ et $\begin{cases} y=0 \\ x\geqslant 0\end{cases}$

b- A l'aide de G calculer $\mathcal{A}(D)$ l'aire de D.

Exercice -17- (4,5 points)



Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.

Soit D le point du plan tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et soit K le symétrique de B par rapport à A. On désigne par O, I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BC]$ et $[AD]$.

1) Soit s la similitude directe du plan telle que s(J)=B et s(D)=K.

a) Montrer qu'une mesure de l'angle de s est $\frac{\pi}{3}$. (0,5)

b) Montrer que le rapport de s est 2 (on pourra montrer que le triangle CBK est équilatéral). (0,75)

c) Montrer que C est le centre de la similitude s. (0,5)

2) Soit A' le symétrique de D par rapport à C et f l'antidéplacement du plan qui transforme D en A et A en A'.

a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques . (0,75)

b) Montrer que f(K)=C. (0,5)

3)**a**) Montrer que g=f $\circ$ s est une similitude indirecte dont on précisera le rapport . On désigne par Δ l'axe de g et par Ω son centre . (0,5)

b) Caractériser l'application g$\circ$g. (0,25)

c) Montrer alors que $\overrightarrow{\Omega B} = 4\,\overrightarrow{\Omega D}$ (0,5)

d) Enfin caratériser géométriquement l'axe Δ de g. (0,25)