L. B. Monastir	Série n : 75	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre : simili. + Arith + L.E.I + Suite +conique + proba + …		

Exercice -1- D'après un devoir

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère la droite D d'équation x=1, le plan F$(4,0)$ et un point variable S$\left(m+1;\ 0\right)$ avec 0<m<3.
(C_m) désigne la conique de foyer F, de directrice D et dont S est un sommet de l'axe focal.

1/a) Exprimer en fonction de m l'excentricité e de (C_m).

b) Déterminer en fonction de m la nature de (C_m).

Pour la suite de l'exercice on suppose de m=1 et on note $(H) = (C_1)$.

2/a) Montrer que (H) est une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

b) Préciser les asymptotes de (H) puis tracer (H).

3/ Soit M$(x_0;y_0)$ un point de (H) non cité sur l'axe focal. La tangente T à (H) en un point coupe D en un point Q.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FQ}$.

b) En déduire une construction géométrique de la tangente T à (H) en M de (H).

Exercice -2- bac Tn 2005

1) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^3e^{1-x^2}$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Construire la courbe $\mathcal{C}$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur IN^* par : $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2}dx$.

a- Calculer u_1.

b- Montrer que pour tout n de IN^* on a : $\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.

En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

3)**a**- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de IN^* on a : $u_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n - \frac{1}{2}$.

b- En déduire l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Exercice -3- Bac Liban 2003

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur IN par

$$\begin{cases} x_0 = 3;\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1;\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1/ Démontrer par récurrence sur n, que $x_n = 2^{n+1} + 1$

2/a- Calculer $x_8 \wedge x_9$, puis $x_{2002} \wedge x_{2003}$.. Que peut-on en déduire pour ces couples de nombres ?

b- x_n et x_{n+1} sont ils premiers entre eux pour tout entier n ?

3/a- Démontrer que pour tout n, $2x_n - y_n = 5$. En déduire y_n en fonction de n.

b- Etudier, suivant les valeurs de l'entier p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

c-On pose $d_n = x_n \wedge y_n$; démontrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$. En déduire l'ensemble des entiers n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice -4-

Dans l'espace E muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$,

on considère le plan P : $P\ :\ x+2y-z-4=0$ et l'ensemble

S= {M$(x,y,z)\in$ E / $2x^2+2y^2+2z^2+8x-4y-8z+6=0$ }.

1/ Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

2/ Vérifier que $H(-1,3,1)$ est un point commun de S et P.

3/ Déterminer la position relative de S et P.

4/ Soit Δ la droite passant par le point $A(1,0,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+a\vec{k}$ avec a un réel.

a- Déterminer la valeur de a sachant que Δ est parallèle à P. On prendra la valeur trouvée pour le reste de l'exercice.

b- Soit C un point de la droite d'intersection de P et le plan perpendiculaire à P contenant Δ. Soit B un point de Δ tel que aire de ABC est égal à 2009. Calculer AB.

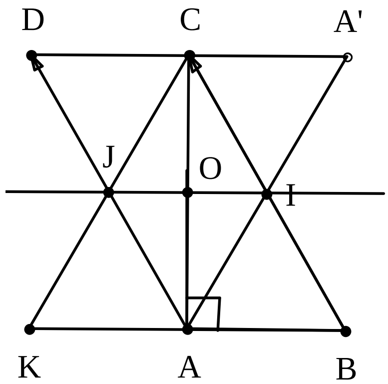
5/**a**- Soit S' l'image de S par la translation T de vecteur $\vec{u}$. Déterminer une équation cartésienne de S'.

b- Montrer que S' est une sphère tangente à P et préciser le point H' de contact de S' et P.

Exercice -5- (4,5 points)

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)}\equiv\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.

Soit D le point du plan tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et soit K le symétrique de B par rapport à A. On désigne par O, I et J les milieux



respectifs des segments $[AC],[BC]$ et $[AD]$.

1) Soit s la similitude directe du plan telle que s(J)=B et s(D)=K.

a) Montrer qu'une mesure de l'angle de s est $\frac{\pi}{3}$. (0,5)

b) Montrer que le rapport de s est 2 (on pourra montrer que le triangle CBK est équilatéral). (0,75)

c) Montrer que C est le centre de la similitude s. (0,5)

2) Soit A' le symétrique de D par rapport à C et f l'antidéplacement du plan qui transforme D en A et A en A'.

a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques . (0,75)

b) Montrer que f(K)=C. (0,5)

3)**a**) Montrer que g=f $\circ$ s est une similitude indirecte dont on précisera le rapport . On désigne par Δ l'axe de g et par Ω son centre . (0,5)

b) Caractériser l'application g$\circ$g. (0,25)

c) Montrer alors que $\overrightarrow{\Omega B}=4\,\overrightarrow{\Omega D}$ (0,5)

d) Enfin caratériser géométriquement l'axe Δ de g. (0,25)

Exercice 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Soit $a \in [0\,;\,+\infty[$.

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
   Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculez $J(a)$.
6. **a.** Démontrez que pour tout $t \in [0\,;\,a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.
   b. Démontrez que pour tout $a \in [0\,;\,+\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.
7. En déduire que pour tout $a \in [0\,;\,+\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \frac{a^6}{6}$.
8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,

(2) $f'(0) = 1$,

(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.
   b. Calculer $f(0)$.
2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :
   (4) pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.
3. On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
   a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
   b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.
   c. En déduire les fonctions u et v.
   d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
4. **a.** Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. **a.** Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.