

## Exercice 1

1/a) Mettre  $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  sous forme trigonométrique.

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}; a^n + \bar{a}^n = 2 \cos \frac{n\pi}{3}$ .

2/ Soit  $z_0 = (1 - i)a$

a) Mettre  $z_0$  sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

b) En déduire  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

## Exercice 2

$(O, \vec{u}; \vec{v})$  est un repère orthonormé direct du plan complexe P.

Soient les points A et B de P d'affixes respectives  $z_A = 2 - i$  et  $z_B = 3 + i$ .

Désignons par C le point de P d'affixe  $z_C$  et vérifiant :

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2} \text{ et } \widehat{(AB; AC)} = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi].$$

1/ Montrer que  $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \sqrt{2}$

2/ Montrer que  $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$ .

3/ Déduire  $z_C$ .

## Exercice 3

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n ki^{k-1}$ .

1/ Calculer  $S_1, S_2$  et  $S_3$ .

2/ Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*; S_n = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{n+1}}{2}$

3/ Soit  $p$  un entier naturel. Discuter suivant  $p$  la valeur de  $i^p$ .

4/ Calculer enfin Les deux sommes R et I définies par :

$$R = 1 - 3 + 5 - 7 + \dots + 2001 - 2003 \quad \text{et}$$

$$I = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots - 2000 + 2002.$$

## Exercice 4

$$\theta \in ] -\pi; \pi[. z_\theta = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})^2.$$

1/ Vérifier que  $z_\theta e^{-i\frac{\theta}{2}} = (1 + \cos\theta)e^{i\frac{\theta}{2}}$ .

2/ Trouver enfin la forme exponentielle de  $z_\theta$ .

## Exercice 5

Dans le plan complexe P on considère les points A(-6 + i), B(-2) et C(-1/2)

Soit  $f : D \rightarrow P; M(z) \mapsto M'(z')$  tel que  $z' = \frac{(2+i)z - (6-i)\bar{z} - 2 + i}{z + \bar{z} + 1}$ .

1/ Déterminer l'ensemble D des points M(z) tels que  $z + \bar{z} + 1 \neq 0$ .

2/a- Soit  $M(z) \in D$ ; montrer que  $z' + 2 = \frac{(4+i)z - (4-i)\bar{z} + i}{z + \bar{z} + 1}$

b- Déduire que  $z' + 2$  est un imaginaire pur

c- Conclure que  $M'(z')$  appartient à une droite fixe que l'on caractérisera.

3/a- Soit  $M(z) \in D$  et  $z \neq -\frac{1}{2}$ . Montrer que  $\frac{z' - (-6+i)}{z + \frac{1}{2}} = \frac{2}{z + \bar{z} + 1}$

b- Déduire que  $M'(z')$  appartient à une droite que l'on caractérisera.

4/ Soit un point M de D tel que  $M \neq C$ . En profitant de tout ce qui précède, expliquer puis construire le point  $M'=f(M)$ .

### Exercice 6

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soient les points  $A(1)$  et  $B(-1)$ . On désigne par  $f$  la transformation de  $P \setminus \{A\}$  dans P qui à tout point  $M(z)$  associe le point  $M'(z' = \frac{z+1}{z-1})$ .

1/ Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  on a :  $(z-1)(z'-1) = 2$

2/ En déduire que l'image par  $f$  du cercle  $\mathcal{C}_{(A; \sqrt{2})}$  est incluse dans un cercle à préciser.

3/a- Montrer que  $\forall z \neq 1; \arg(z-1) + \arg(z'-1) \equiv 0 [2\pi]$ ; en déduire que la demi-droite  $[AB)$  est une bissectrice de l'angle orienté  $(\vec{AM}; \vec{AM}')$ .

b- Montrer que :  $z'$  est réel  $\Leftrightarrow z$  est réel.

c- Soit  $N(\bar{z})$ . Montrer que les points  $A, N$  et  $M'$  sont alignés.

4/ En déduire de ce qui précède la construction du point  $M'$  l'image d'un point  $M$  appartenant au cercle  $\mathcal{C}_{(A; \sqrt{2})}$  et n'appartenant pas à l'axe des abscisses.

### Exercice 7 Bac

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On note A et B les points d'affixes respectives  $i$  et  $-2i$ . Soit  $f: P \setminus \{A\} \rightarrow P$ ;

$M(z) \mapsto M'(z')$  tel que  $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$ .

1) Déterminer par deux méthodes (l'une géométrique et l'autre en cherchant l'équation cartésienne) la nature de l'ensemble des points  $M(z)$  tel que  $z'$  soit réel.

2) Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}; (z'+2i)(z-i) = 1$ .

3) Soit  $\Gamma$  le cercle de centre A et de rayon 1. Montrer que si  $M \in \Gamma$  alors  $M' \in \Gamma'$  le cercle de centre B et de rayon 1.

4) Soit T le point d'affixe  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$ .

a- Montrer que  $T \in \Gamma$ .

b- Déterminer une mesure en radians de  $(\vec{u}; \vec{AT})$  déduire  $(\vec{u}; \vec{BT}')$ .

c- Construire en fin le point  $T'=f(T)$ .

### Exercice 8 bac

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On note A et B les points d'affixes respectives  $-2$  et  $\frac{1}{2}i$ . Soit  $f: P \setminus \{A\} \rightarrow P$ ;

$M(z) \mapsto M'(z')$  tel que  $z' = \frac{2z-i}{iz+2i}$ .

1/ Déterminer et construire l'ensemble  $E = \{M(z) \text{ tel que } z' \in (i\mathbb{R})\}$ .

2/ Soit  $M(z)$  tel que  $z \notin \{-2, \frac{1}{2}i\}$ .

a- Montrer que  $(\vec{u}, \vec{OM}') \equiv -\frac{\pi}{2} + (\vec{AM}, \vec{BM}) [2\pi]$

b- En déduire que si  $M \in (AB) \setminus \{A, B\}$  alors  $M'$  appartient à une droite que l'on caractérisera.

3/ Déterminer l'ensemble contenant les points  $M'$  quand  $M$  varie sur la médiatrice du segment  $[AB]$ .