L. B. Monastir	Série n : 10	4 ^{ème} Math – K.M.
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n : 4
Chapitres : Nombres Complexes + Limite - Continuité + Suite +...		

Exercice 1 D'après un devoir

I-1/ Déterminer les racines carrées de 3+4i.

2/ Soit $(E)\ :\ iz^2 + iz + (i-1) = 0$

a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b- Ecrire sous forme exponentielle les solutions de l'équation (E).

II/ Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout z $\in \mathbb{C}$, on pose

$$(E_\theta)\ :\ iz^2 + e^{2i\theta}z + i(e^{2i\theta}+1) = 0$$

On note z' et z" les solutions de l'équation (E_θ).

1/a- Montrer que $e^{2i\theta} + 1 = 2\cos\theta . e^{i\theta}$.

b- Sans calculer z' et z"; calculer z'×z'' puis montrer que

$\arg(z') + \arg(z'') \equiv \theta\quad [2\pi]$

c- Montrer que $\arg\left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}\right) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}\quad [2\pi]$

d- Déterminer la valeur de θ pour que z'+z"=-1.

2/a- Calculer $(e^{2i\theta}+2)^2$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

III- Soit P le plan complexe rapporté à un repèr orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit les points A et M d'affixes respectives $z_A = -i$ et $z_M = i(1+e^{2i\theta})$.

1/a- Ecrire z_M sous forme exponentielle (utiliser **II-1/a**-)

b- Exprimer OM en fonction de θ.

c- Déterminer la valeur de θ pour que le triangle OAM soit isocèle en O.

2/ Déterminer et construire l'ensemble des points M lorsque θ varie dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2

1/a- Montrer que $a = e^{i\frac{2\pi}{9}}$ est une solution de l'équation $(E)\ : z^9 = 1$.

b- Exprimer les solutions de (E) en fonction de a.

2/ Soit θ un réel tel que $1 + e^{i\theta} \neq 0$. Donner la forme algébrique de $\frac{i - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$

3/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E')\ :\ (i+z)^9 = (1+z)^9$.

Exercice 3 Bac

1)a- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation:

$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

b- Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

c- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - \sqrt{3}z^2 + 1 = 0$.

2/ Soit θ un réel de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

a- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ : z^2 - (2\sin\theta)z + 1 = 0$

Vérifier que $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ et $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ sont les solutions de (E).

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - (2\sin\theta)z^2 + 1 = 0$.

Exercice 4

Soit la fonction f: x $\mapsto x^4 - 6x^2 + x; \forall x \in [0;4]$

1/a- Dreser le tableau de variation de f' la fonction dérivée de f.

b- Déterminer le nombre de solution de l'équation f'$(x) = 0$

c- Donner un encadrement d'amplitude 0.5 de chaque solution d- Donner le tableau de signe de f'(x)

2/a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Donner le nombre de solution de l'équation f$(x) = 0$.

Exercice 5

Soit f : $[0;1] \longrightarrow [0;1]$ une fonction continue.

1/ Montrer que f à un point fixe (c'est à dire il existe c $\in [0;1]$ tel que f$(c) = c$.

2/ Montrer qu'il existe un réel a dans $[0;1]$ tel que f$(a) = a$.

3/ On suppose que f$(0) = 0$ et f$(1) = 1$. Montrer qu'il existe b dans $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ tel que f$\left(b+\frac{1}{2}\right) - f(b) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6

1- Soit $f:[0,2]\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction **continue** vérifiant $f(0)=f(2)$

Montrer qu'il existe c dans $[0,1]$ tel que $f(c)=f(c+1)$

2- Soit $f:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction **continue** vérifiant $f(0)=f(1)$

Montrer qu'il existe c dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c+\frac{1}{2})=f(c)$

Exercice 7 d'après un devoir

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+4} - x & si\ x \in]-\infty, 0] \\ f(x) = x^3 + 2 + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

1/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+2x]$.

2/a- Mntrer que $\forall x \succ 0;\ x^3+2-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^3+2+x^2$

b- Déterminer alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c- Montrer que f est continue en 0.

3/a- Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$.

b- Montrer que f est bornée sur $[-4;\ -2]$.

c- Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty,0]$ par f.

d Montrer que l'équation f$(x) = 3$ admet une unique solution $\alpha \in]-1,0[$

e- Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 8 *d'après un devoir* (légèrement modifié)

1/ Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ f(x) = \dfrac{x^2\sin\frac{2}{x}}{x+1} & \text{si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$

a) Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[;\ |f(x)| \leqslant x^2$.

b) En déduire la limite de f à droite en 0.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$

d) Montrer enfin que f admet un prolongement par continuité en 0.

2/ Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3/ Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par g$(x) = f\left(-\sqrt{1+x}\right)$.

a) Montrer que g est continue sur $]-1;+\infty[$.

b) Montrer que l'équation g$(x) = -\frac{1}{4}$ admet au moins une solution dans]0;1[.

Exercice 9 *D'après un devoir*

Soient les suites u et v définies sur IN* par : $\forall n \in IN^*$

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$

1/ Montrer que u est croissante et v est décroissante.

2/a- Montrer que ; $n! \geqslant n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (n!)$.

b- En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$.

c- Déduire alors que les suites u et v sont adjacentes.

3/a- Montrer que les suites u et v sont convergentes vers une même $\forall n \in IN^*$ limite L et que $\forall n \in IN^*;\ u_n \leqslant L \leqslant v_n$.

b- Calculer u_3 et v_3. En déduire que $1,66 \prec L \prec 1,73$

Exercice 10 *D'après un devoir (légèrement modifié)*

1/ Soit f la fonction définie sur]0;+∞[par : $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$

Montrer que $\forall x \in [1;2],\ f(x) \in [1;2]$.

2/ On considère la suite $(u_n)_{n \in IN}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n);\ \forall n \in IN$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \in [1;2]$.

b- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$ puis que $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$

c- Montrer par récurrence que $\forall n \in IN;\ \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\sqrt{2} - 1\right)$

d- En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 11 *D'après un devoir*

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = (-1)^n\sqrt{n} + 2$.

1/ Etudier la convergence de la suite (u_n).

2/ Soit la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = \frac{u_n - n}{2 + n}$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ \frac{-\sqrt{n} - n + 2}{2 + n} \leqslant v_n \leqslant \frac{\sqrt{n} - n + 2}{2 + n}$

b- En déduire que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.

3/ Soit la suite (w_n) définie sur IN par $w_n = \frac{\sin n - n}{2 + \sqrt{n}}$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ w_n \leqslant -\sqrt{n} + 2$.

b- En déduire la limite de la suite (w_n).

Exercice 12 *D'après un devoir (légèrement modifié)*

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}$

1/a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

b) Montrer que $u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ et déduire que la suite (u_{2n}) est décroissante.

2/ Montrer que (u_{2n+1}) est croissante.

3/ Prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

4/ Montrer que (u_n) converge vers un réel L et que $u_3 \prec L \prec u_4$.