

L. B. Monastir	Série n : 7	4^{ème} Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n : 2
Chapitre : Suites réelles +...		

Exercice 1

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1/a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq 0$.

b- Dédire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2/a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} \geq u_n + 1$.

b- Dédire que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq n$.

c- Préciser donc la limite de (u_n) .

Exercice 2 D'après un devoir

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 \sqrt{u_n}$; $\forall n \geq 0$

1/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 < u_n < 1$.

2/ Montrer que (u_n) est décroissante.

3/ En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

4/a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b- Retrouver la limite de (u_n) .

Exercice 3 D'après un devoir

1/ Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$.

a- Dresser le tableau de variation de f .

b- Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$; $f(x) \geq \sqrt{2}$.

c- Montrer que $\forall x \geq \sqrt{2}$; $f(x) \leq x$.

2/ Soit la suite (u_n) défini sr \mathbb{N}^* par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > \sqrt{2}$.

b- Montrer que (u_n) est décroissante.

c- Dédire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3/a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 < u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$.

b- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c- Retrouver la limite de (u_n) .

Exercice 4

Soit la suite (w_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $w_1 = 0$ et $w_{n+1} = \frac{1}{w_n + \frac{1}{n}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1/a- Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $1 - \frac{1}{n} \leq w_n \leq 1$.

b- Etudier la convergence de (w_n) .

2/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$S_n = \frac{1}{n^2}(1w_1 + 2w_2 + 3w_3 + \dots + nw_n)$$

a- Mq $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{2} \leq 1w_1 + 2w_2 + 3w_3 + \dots + nw_n \leq \frac{n(n+1)}{2}$

b- Dédire que (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1/ Etudier la monotonie de (u_n) .

2/a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_n \geq 2^{n-1}$.

b- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

a- Montrer que (S_n) est croissante sur \mathbb{N}^* .

b- Donner, en fonction de n , une expression plus simple de

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

c- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; S_n \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d- conclure de ce qui précède que la suite (S_n) est convergente.

Exercice 6

Soit la suite réelle (u_n) définie sur \mathbb{N} par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{6u_n^2 + 1}}$

1/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante .

c) Montrer que (u_n) est convergente et préciser sa limite L .

2/ Soit (v_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par: $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2 - 1}}$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

b- Déterminer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

c- Retrouver la limite de la suite (u_n) .

3/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{u_n^2} = 2 - \frac{1}{4^n}$.

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*; S_n = \frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{u_1^2} + \dots + \frac{1}{u_{n-1}^2}$.

$$\text{Montrer que } \forall n \in \mathbb{N}^*; S_n = 2n - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{S_n}{n} \right].$$

Exercice 7 Extrait d'un devoir (légèrement modifié)

Soit (u_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \leq u_n < 3$.

2/ Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

3/ Prouver (u_n) est une suite convergente.

4/a- Montrer que alors pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < 3 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(3 - u_n)$.

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < 3 - u_n \leq 3 \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 8 Extrait d'une série d'un collègue

Soit (u_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer que pour tout n de \mathbb{N} on a : $u_n \geq 1$.

2/ Montrer que (u_n) est croissante.

3/a- Montrer que si (u_n) est majorée alors (u_n) est converge vers -1 .

b- Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4/a- Montrer que pour tout n de \mathbb{N} on a : $u_{n+1} > u_n + \frac{1}{2}$.

b- Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5/ Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = u_{n+1} - u_n$.

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; v_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$.

b- En déduire que (v_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- 1/a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n > 0$.
- b- Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- c- En déduire que $u_{n+1} \geq 3u_n; \forall n \in \mathbb{N}$
- d- Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 3^n$
- e- Préciser alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2/ On considère la suite (S_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$

- a- Montrer que (S_n) est croissante.
- b- Montrer que $1 \leq S_n \leq \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]$
- c- Déduire enfin que (S_n) converge vers un réel L et que $L \in \left[1; \frac{3}{2} \right]$

Exercice 10*D'après un devoir*

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_n + 2}{1 + u_n}; \forall n \in \mathbb{N}$

- 1/a- Mq $\forall n \in \mathbb{N}; 1 < u_n \leq 2$.
- b- Etudier la monotonie de u . En déduire que u est convergente et calculer sa limite.
- 2/a- Mq $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$.
- b- Mq $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$ puis retrouver la limite de u .
- 3/ On pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ pour tout k de \mathbb{N}^* .
- a- Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*; n < S_n \leq n + 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n$
- b- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 11*(Omar Al Khayam n:71 page : 44)*

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}; \forall n \in \mathbb{N}$.

- 1/ Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
- 2/ Prouver que (u_n) est strictement croissante.
- 3/ Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}; 2 \leq (u_{k+1})^2 - (u_k)^2 \leq 2 + u_{k+1} - u_k$.
En déduire que pour tout entier naturel n ;
 $2n \leq (u_n)^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$
- 4/ Prouver que (u_n) diverge vers $+\infty$.
- 5/ Prouver que quel que soit le naturel $n; 1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{(u_n)^2} \leq 1 - \frac{1}{(u_n)^2}$
puis que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{2n}} \right)$ a une limite réelle que l'on précisera.

Exercice 12

1/ Soit la suite U définie sur IN^* par :

$$u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in IN^*; u_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{u_n}.$$

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in IN^*; n \leq u_n \leq n + 1$.

b) En déduire la limite de la suite U .

2/ Soit la suite V définie sur IN^* par $v_n = \frac{1}{u_n - n} - 1$.

a) Montrer que $\forall n \in IN^*; v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \frac{1}{n}}$.

b) Calculer v_2 et montrer par récurrence que :

$$\forall n \in IN^*; 1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1.$$

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n)$.

3/ Soit la suite S définie sur IN^* par $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kv_k)$.

a) Montrer que $\forall n \in IN^*; S_n - \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(v_k - 1)$

b) En déduire que $\forall n \in IN^*; \frac{-1}{n} \leq S_n - \frac{n+1}{2n} \leq 0$.

c) Montrer alors que la suite S converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 13 (Ex 10 page 6 du tome 1 de la collection Math plus)

Soit $(u_n)_{n \in IN}$ la suite définie sur IN par
$$\begin{cases} u_0 \in IR \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n; \forall n \in IN \end{cases}$$

1/ Déterminer la valeur de u_0 pour que (u_n) soit une suite constante.

2/ On suppose que $u_0 > 0$.

a- Montrer que $\forall n \in IN; u_n > 0$.

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c- En déduire que $u_{n+1} \geq u_n(u_0 + 2)$ puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3/ Soit $u_0 \in IR$. On définit la suite (v_n) définie par $\forall n \in IN; v_n = 1 + u_n$.

a- Montrer que $\forall n \in IN; v_{n+1} = (v_n)^2$. En déduire par récurrence que

$$\forall n \in IN; v_n = (1 + u_0)^{2^n}$$

$$\text{Vérifier alors que } u_n = (1 + u_0)^{2^n} - 1.$$

b- Montrer que :

$$(u_n) \text{ converge si et seulement si } -2 < u_0 \leq 0.$$

Supposons que (u_n) converge calculer sa limite.

4/ On prend $u_0 = 1$ et on considère la suite $t_n = \frac{1}{1 + u_n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k; \forall n \in IN^*$

a- Montrer que $\forall n \in IN; 0 \leq t_n \leq \frac{1}{2^n}$.

b- Montrer que (S_n) est croissante et $1 \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

En déduire que (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 14

Soit les suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \text{ pour } n \geq 1$$

On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1/ Montrer que la suite (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.

2/ Comparer v_n et w_n .

3/a) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

b) Déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel α .

4/ Déterminer un entier naturel n permettant d'avoir un encadrement de α d'amplitude inférieur à 10^{-2} .

Exercice 15 D'après un devoir

Soient les suites u et v définies sur \mathbb{N}^* par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$$

1/ Montrer que u est croissante et v est décroissante.

2/a- Montrer que ; $n! \geq n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)$.

b- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$.

c- Déduire alors que les suites u et v sont adjacentes.

3/a- Montrer que les suites u et v sont convergentes vers une même limite L et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_n \leq L \leq v_n$.

b- Calculer u_3 et v_3 . En déduire que $1,66 < L < 1,73$

Exercice 16 D'après un devoir (légèrement modifié)

1/ Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$

a- Montrer que $\forall x \in [1; 2]$, $f(x) \in [1; 2]$.

b- Montrer que : $f(x) = x \iff x = \sqrt{x}$

2/ On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \in [1; 2]$.

b- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{u_n} (u_n - \sqrt{2})^2$ puis que

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{2}|$$

c- Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{2} - 1)$

d- En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 17 D'après un devoir

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = (-1)^n \sqrt{n} + 2$.

1/ Etudier la convergence de la suite (u_n) .

2/ Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par : $v_n = \frac{u_n - n}{2 + n}$.

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{-\sqrt{n} - n + 2}{2 + n} \leq v_n \leq \frac{\sqrt{n} - n + 2}{2 + n}$

b- En déduire que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.

3/ Soit la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par $w_n = \frac{\sin n - n}{2 + \sqrt{n}}$.

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $w_n \leq -\sqrt{n} + 2$.

b- En déduire la limite de la suite (w_n) .

Exercice 18 D'après un devoir (légèrement modifié)

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n}$

1/a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

b) Montrer que $u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ et déduire que la suite

(u_{2n}) est décroissante.

2/ Montrer que (u_{2n+1}) est croissante.

3/ Prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

4/ Montrer que (u_n) converge vers un réel L et que $u_3 < L < u_4$.