L. B. Monastir	Série n : 23	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n : 6
Chapitres : Suites réelles + isométries + …		

EXERCICE 1 Vrai - Faux

1/ Les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN* par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ sont adjacentes

2/ Si une suite (u_n) est convergente vers 1 alors la suite (v_n) définie par $v_n = (-1)^n u_n$ est convergente.

3/ Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs tel que pour tout $n \in IN$; $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ et $u_0 \succ 0$ alors (u_n) n'est pas majorée.

EXERCICE 2

EXERCICE 6 d'après un devoir

Soit f_n la fonction sur IR par $f_n(x) = x^3 + x^2 - nx - 1$ où $n \in IN^*\backslash\{1\}$.

1/**a**- Montrer que f_n est dérivable sur IR puis résoudre $f'(x) = 0$. On notera α_n et β_n les solutions de cette équation avec $\alpha_n \succ 0$.

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

c- Montrer que $\alpha_n^2 = \dfrac{n - 2\alpha_n}{3}$.

2/**a**- Dresser le tableau de variation de f_n sur IR^+.

b- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans IR^+.

c- Montrer que pour tout $n \geq 2$; $\alpha_n < x_n < \sqrt{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

3/**a**- Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$ pour $x \in IR^+$ et $n > 1$.

b- En déduire que (x_n) est croissante.

4/**a**- Montrer que pour tout $n \geq 2$; $n = x_n^2 + x_n - \dfrac{1}{x_n}$.

b- En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{x_n} = 1$

EXERCICE 7

Soit la fonction f : $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x+3}$; $\forall x \geqslant 0$.

1/a- Donner le tableau de signe de $f''(x)$; $\forall x \geqslant 0$.

b- La courbe de f admet-elle des points d'inflexions ?

2/ Montrer que $\forall x \geqslant 0;\ 0 \prec f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

3/ Déterminer le réel α solution de l'équation $f(x) = x$

4/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par :$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$;$\forall n \in IN$

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \prec \alpha$.

b- Prouver que $\forall n \in IN;\ 0 \prec \alpha - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(\alpha - u_n)$.

c- Déduire que $\forall n \in IN;\ 0 \prec \alpha - u_n \leqslant \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d- Prouver que (u_n) converge.

EXERCICE 8

ABCD est un carré direct de centre O. Soit f une isométrie transformant A en C et B en D.

1/ Prouver que f ne peut pas avoir une droite fixe point par point.

2/ Supposons que f possède un seul point fixe. Prouver que f ne peut être que la rotation de centre O et d'angle π.

3/ Supposons que f n'a pas de point fixe.
Prouver que f n'est pas une translation.

EXERCICE 9

Soit dans le plan P un carré direct $ABCD$ de centre I.
Soient les applications définies de P dans P par :

$$f = R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad h = r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AD)}.$$

1/ Caractériser l'application f.

2/a) Déterminer la droite Δ telle que $r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(BD)} \circ S_{\Delta}$.

b) Caractériser alors h.

3/ Soit l'application φ définie de P dans P par : $\varphi = S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer l'image de A par φ.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

EXERCICE 10

ABC est un triangle équilatéral. Soit f l'isométrie qui n'a pas de point fixe et qui transforme A en B et B en C.

1/a) Prouver que f n'est pas une translation.

b) Déduire la nature de f.

2/ Posons $g = f \circ f$, D le point tel que ABDC est un parallélogramme et E le point tel que ABCE est un parallélogramme.

a) Déteminer g(A) et g(B).

b) Prouver que g n'a pas de point fixe.

c) Déduire les natures possibles de g.

3/ Posons h $= t_{\overrightarrow{BA}} \circ f$.

a) Montrer que h est une isométrie qui fixe A et différente de l'identité du plan.

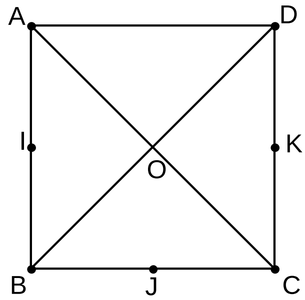
b) Montrer que h ne peut pas être une rotation de centre A

c) Caractériser donc l'application h.

EXERCICE 11

Dans la figure ci-contre:

- $ABCD$ est un carret direct de centre O
- $I = A * B$; $J = B * C$ et $K = C * D$



1/a- Montrer qu'il existe une seulle rotation f telle que $f(C) = J$ et $f(J) = O$. Déterminer l'angle de f.

b- Déterminer $f \circ f$ en déduire que f est une rotation de centre $\Omega = O * C$.

2/a- Préciser $f(O)$ en déduire $f(I)$ (on remarque que $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{OI}$).

b- Quelle est la nature du triangle ΩID ?

3/ On pose $g = t_{\overrightarrow{CJ}} \circ f$, $h = S_{(BD)} \circ g$ et $\varphi = h \circ S_{(AB)}$.

a- Préciser $g(O)$ puis caractériser g en déduire l'image du carré $ABCD$ par g.

b- Préciser $h(O)$ et $h(J)$ puis caractériser h et φ.

EXERCICE 12

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1/Soit $f : P :\rightarrow P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = -iz + 2i$.

a- Prouver que f est une isométrie qui possède un seul point fixe

b- Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

2/ Soit $h = f \circ S$ avec S la symétrie orthogonale d'axe $(O;\vec{u})$

a- Montrer que f est une isométrie.

b- Soit $M(z)$ d'image $M'(z')$ par h. Exprimer z' en fonction de z.

c- En déduire la nature de h.

3/ Posons $g = S \circ h$. Montrer que g est une translation que l'on caractérisera.