L. B. Monastir	**Série n : 12**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :
Chapitres : Nombres Complexes + Limite - Continuité + Suite +…		

Exercice 1 Vrai - Faux

1/ Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n+2}$; $\forall n \in IN$. (u_n) et (v_n) sont adjacentes ☐

2/ Soit l'équation (E_a) : $az^2 - 2iz + \overline{a} = 0$ avec a un paramètre complexe
Si $|a| = \sqrt{2}$ alors (E_a) admet deux solutions imaginaires pures ☐

3/ Si z' et z'' sont les solutions de l'équation $z^2 - (1+i)z + \left(1+\cos^2\frac{\pi}{11}\right)e^{i\frac{-\pi}{4}} = 0$
$\arg(z' + z'') \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ☐.

.

Exercice 2 D'après un devoird'après un devoir (légèrement modifié)

1/ Soit f la fonction définie sur $]-6, +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x+3}{x+6}$

a- Etudier les variations de f sur $]-6;\ +\infty[$.

b- Montrer que pour tout réel x de $[0, 1[$; $0 \leqslant f(x) \prec 1$

c- Montrer que pour tout réel x de $[0, 1[$; $f(x) \succ x$.

2/ On donne la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in IN$.

a- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ; $0 \leqslant u_n \prec 1$

b- Montrer que u_n est croissante.

c- Prouver alors que (u_n) converge et préciser sa limite.

3/**a**- Montrer que pour tout n de IN ; $|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

b- En déduire que pour tout entier naturel n ; $|u_n - 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c- Retrouver la limite de (u_n).

4/ On donne la suite (v_n) définie par $v_n = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$.

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q.

b- Pour tout n de IN on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{u_k + 3}$.

Exprimer S_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 3 D'après un devoir

1/ Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$.

a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$; $f(x) \geqslant \sqrt{2}$.

c- Montrer que $\forall x \geqslant \sqrt{2}$; $f(x) \leqslant x$.

2/ Soit la suite (u_n) défini sr IN^* par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $\forall n \in IN$

a- Montrer que $\forall n \in IN$; $u_n \succ \sqrt{2}$.

b- Montrer que (u_n) est décroissante.

c- Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3/**a**- Montrer que $\forall n \in IN^*$; $0 \prec u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.

b- En déduire que $\forall n \in IN^*$; $0 \prec u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c- Retrouver la limite de (u_n).

Exercice 4

Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{3+2u_n}{1+u_n}$; $\forall n \in IN$

1/**a**- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \geqslant 1$.

b- Déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est croissante.

2/**a**- Montrer par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée.

b- Préciser alors la limite de (u_n).

3/**a**- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_{n+1} \geqslant u_n + 2$.

b- Déduire que $\forall n \in IN;\ u_n \geqslant 2n+1$

4/**a**- Montrer que $\forall k \in IN;\ 2 \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 3$

b- Déduire que $\forall n \in IN; n(n+1) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k(u_{k+1} - u_k) \leqslant \dfrac{3n(n+1)}{2}$

c- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n} k(u_{k+1} - u_k) \right]$.

Exercice 5 (**6**,**5 points**)

Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{2u_n}{1-u_n}$; $\forall n \in IN$

1/**a**- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \leqslant -1$.

b- Déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante.

2/ Montrer par l'absurde que (u_n) n'est pas convergente.

3/**a**- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_{n+1} \leqslant u_n - 1$.

b- Prouver alors que $\forall n \in IN;\ u_n \leqslant -1 - n$.

c- Trouver la limite de (u_n).

4/ Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ -2 \leqslant v_n \leqslant -2 + \dfrac{2}{2+n}$

b- Etudier donc la convergence de (v_n).

5/ Soit la suite $(S_n)_{n\in IN}$ définie par $S_n = \dfrac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k.v_k)$ pour tout n de IN^*

Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$.

Exercice 6 *Extrait d'une série d'un collègue*

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$; $\forall n \in IN$

1/ Montrer que pour tout n de IN on a : $u_n \geqslant 1$.

2/ Montrer que (u_n) est croissante.

3/**a**- Montrer que si (u_n) est majorée alors (u_n) est converge vers -1.

b- Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/**a**- Montrer que pour tout n de IN on a : $u_{n+1} \succ u_n + \dfrac{1}{2}$.

b- Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5/ Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in IN;\ v_n = u_{n+1} - u_n$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ v_n \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$.

b- En déduire que (v_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 7 *d'après un devoir*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{x^2} & \text{si } x \prec 0 \\ \dfrac{x^2(\sqrt{x}-1)}{-x^2-x+2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement.

3)**a**- Encadrer $f(x)$ pour $x \in]-\infty, 0[$.

b- Calculer alors $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ puis montrer que f est continue en 0.

c- Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.

d- f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

4) Soit g la fonction définie sur I=$\left[1,\ 2\right]$ par g$(x) = f(-x + \cos \pi x)$

Montrer que g est continue sur I.

Exercice 8 *d'après un devoir*

Dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, ci-dessous, est tracé les courbes représentatives (C) et (C') respectives des fonctions f et g. La fonction f est définie sur $]-\infty, -1]$ et la fonction g est définie sur]2;4].

1/ Donner graphiquement : $f(-1),\ f(-2),\ g(4),\ g(3),\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$.

2/ En déduire $g \circ f([-2, -1])$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g \circ f(x)$.

3/**a**- Montrer que pour tout réel a et b tels que $a \prec b \leqslant -1$; on a $g \circ f(a) \succ g \circ f(b)$

b- En déduire le sens de variation de la fonction g$\circ f$ sur $]-\infty, -1]$.

4/ Prouver que l'équation g$\circ f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α dans $]-2;\ -1[$.

Exercice 9

Pour tout $n \in IN^* \setminus \{1\}$ on considère la fonction f_n définie sur IR^+ par :

$f_n(x) = -1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$.

1/ Dresser le tableau de variation de f_n.

2/**a**) Calculer $f_n(1)$.

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique u_n.

On construit ainsi une suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.

3/**a**) Montrer que pour tout n $\geqslant 2$; $u_n \in]0;1[$

b) Prouver que $f_{n+1}(u_n) \geqslant 0$, déduire la monotonie de (u_n)

c) Justifier la convergence de la suite (u_n).

4/**a**) Montrer que $2 - u_n = \dfrac{1 - u_n^{n+1}}{1 - u_n}$; $\forall n \geqslant 3$

b) Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{n+1} = 0$

c) Déterminer enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 10 *Bac*

1)**a**- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation:

$z^2 - \sqrt{3}\, z + 1 = 0$

b- Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

c- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - \sqrt{3}z^2 + 1 = 0$.

2/ Soit θ un réel de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

a- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (2\sin\theta)z + 1 = 0$

Vérifier que $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ et $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ sont les solutions de (E).

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - (2\sin\theta)z^2 + 1 = 0$.

Exercice 11 *Bac Tn 2003 s. controle*

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$(E) : z^3 - 2\left(\sqrt{3} + i\right)z^2 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 8i = 0$

1/a- Montrer que (E) *admet* une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b- Résoudre (E) *dans* $\mathbb{C}$.

c- Donner la forme exponentielle de chaque solution de (E).

2/ Soit θ un réel et E_θ l'équation :

$(E_\theta) : z^3 - 2e^{i\theta}\left(\sqrt{3} + i\right)z^2 + 4e^{2i\theta}\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 8ie^{3i\theta} = 0$

a- Démontrer que : $(ze^{-i\theta})$ est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E_θ).

b- En déduire les solutions de (E_π) suivante :

$z^3 + 2\left(\sqrt{3} + i\right)z^2 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 8i = 0$

3/ Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les images des solutions des équations (E) et (E_π) et vérifier qu'elles sont les sommets d'un polygone régulier

Exercice 12 *d'après un devoir*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on concidère les points A(1) et B$(-i)$, à tout point $M(z \neq -i)$ on associe $M'(z')$ tel que $z' = \frac{1-z}{1-iz}$

1/ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$.

2/ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' est réel.

3/a- Vérifier que $(z' + i)(z + i) = -1 + i$

b- En déduire que : $BM.BM' = \sqrt{2}$ et $\widehat{\left(\vec{u},\overrightarrow{BM}\right)} + \widehat{\left(\vec{u},\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Exercice 13 *d'après un devoir*

1) Soient a un nombre complexe non nul a différent de $(-i)$ et (E) l'équation $z^2 - (i + a + ia)z - a + ia^2 = 0$.

a- Vérifier que (ia) est une solution de (E).

b- En déduire que l'autre solution de (E) est $i + a$.

c- Retrouver les solutions de (E) à l'aide du calcul du discriminant Δ.

2) Dans le plan P, muni d'un repère orthonormée direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives ia et $(a + i)$.

a- Ontrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \mathrm{Re}(a)$.

b- En déduire que :

Le triangle OAB est rectangle en O si et seulement si a est imaginaire.

c- Déterminer alors a pour que le triangle OAB soit rectangle et isocèle en O.

3) On suppose que $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a- Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

b- Déterminer l'ensemble décrit par chacun des points A et B lorsque α varie dans $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n ; \forall n \in IN \end{cases}$

1/**a**- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n > 0$.

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c- En déduire que $u_{n+1} \geqslant 3u_n;\ \forall n \in IN$

d- Montrer alors que $\forall n \in IN;\ u_n \geqslant 3^n$

e- Préciser alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2/ On considère la suite (S_n) définie sur IN* par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$

a- Montrer que (S_n) est croissante.

b- Montrer que $1 \leqslant S_n \leqslant \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

c- Déduire enfin que (S_n) converge vers un réel L et que L$\in \left[1;\ \frac{3}{2}\right]$

Exercice 10 *D'après un devoir*

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_n + 2}{1+u_n};\ \forall n \in IN$

1/**a**- Mq $\forall n \in IN;\ 1 \prec u_n \leqslant 2$.

b- Etudier la monotonie de u. En déduire que u est convergente et calculer sa limite.

2/**a**- Mq $\forall n \in IN;\ 0 \prec u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

b- Mq $\forall n \in IN;\ 0 \prec u_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver la limite de u.

3/ On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ pour tout k de IN*.

a- Mq $\forall n \in IN^*;\ n \prec S_n \leqslant n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 11 *(Omar Al Khayam n:71 page : 44)*

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n};\ \forall n \in IN$.

1/ Montrer par récurrence que $\forall n \in IN,\ u_n > 0$.

2/ Prouver que (u_n) est strictement croissante.

3/ Démontrer que $\forall k \in IN;\quad 2 \leqslant (u_{k+1})^2 - (u_k)^2 \leqslant 2 + u_{k+1} - u_k$.

En déduire que pour tout entier naturel n;

$$2n \leqslant (u_n)^2 - 1 \leqslant 2n + u_n - 1$$

4/ Prouver que (u_n) diverge vers $+\infty$.

5/ Prouver que quel que soit le naturel n ; $1 - \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{2n}{(u_n)^2} \leqslant 1 - \frac{1}{(u_n)^2}$

puis que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{2n}}\right)$ a une limite réelle que l'on précisera.

Exercice 12

1/ Soit la suite U définie sur IN^* par :

$$u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in IN^*; u_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{u_n}.$$

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in IN^*;\ n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b) En déduire la limite de la suite U.

2/ Soit la suite V définie sur IN^* par $v_n = \frac{1}{u_n - n} - 1$.

a) Montrer que $\forall n \in IN^*;\ v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \frac{1}{n}}$.

b) Calculer v_2 et montrer par récurrence que :

$$\forall n \in IN^*;\ 1 - \frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1.$$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - n)$.

3/ Soit la suite S définie sur IN^* par $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kv_k)$.

a) Montrer que $\forall n \in IN^*;\ S_n - \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k(v_k - 1)$

b) En déduire que :$\forall n \in IN^*;\ \frac{-1}{n} \leqslant S_n - \frac{n+1}{2n} \leqslant 0$.

c) Montrer alors que la suite S converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 13 (*Ex 10 page 6 du tome 1 de la collection Math plus*)

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie sur IN par $\begin{cases} u_0 \in IR \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n;\forall n \in IN \end{cases}$

1/ Déterminer la valeur de u_0 pour que (u_n) soit une suite constante.

2/ On suppose que $u_0 > 0$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n > 0$.

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c- En déduire que $u_{n+1} \geqslant u_n(u_0 + 2)$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3/ Soit $u_0 \in IR$. On définie la suite (v_n) définie par $\forall n \in IN;\ v_n = 1 + u_n$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ v_{n+1} = (v_n)^2$. En déduire par récurrence que $\forall n \in IN;\ v_n = (1+u_0)^{2^n}$

Vérifier alors que $u_n = (1+u_0)^{2^n} - 1$.

b- Montrer que :

(u_n) converge si et seulement si $-2 < u_0 \leqslant 0$.

Supposons que (u_n) converge calculer sa limite.

4/ On prend $u_0 = 1$ et on considère la suite $t_n = \frac{1}{1+u_n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_n;\ \forall n \in IN^*$

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ 0 \leqslant t_n \leqslant \frac{1}{2^n}$.

b- Montrer que (S_n) est croissante et $1 \leqslant S_n \leqslant 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

En déduire que (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 14

Soit les suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par :

u$_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ pour n $\geqslant$ 1

On pose v$_n = u_{2n}$ et w$_n = u_{2n+1}$.

1/ Montrer que la suite (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.

2/ Comparer v$_n$ et w$_n$.

3/**a**) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

b) Déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel α.

4/ Déterminer un entier naturel n permettant d'avoir un encadrement de α d'amplitude inférieur à 10^{-2}.

Exercice 15 *D'après un devoir*

Soient les suites u et v définies sur IN* par : $\forall n \in IN^*$

u$_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$

1/ Montrer que u est croissante et v est décroissante.

2/a- Montrer que ; $n! \geqslant n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (n!)$.

b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n)$.

c- Déduire alors que les suites u et v sont adjacentes.

3/a- Montrer que les suites u et v sont convergentes vers une même $\forall n \in IN^*$ limite L et que $\forall n \in IN^*;\ u_n \leqslant L \leqslant v_n$.

b- Calculer u_3 et v_3. En déduire que $1,66 \prec L \prec 1,73$

Exercice 16

D'après un devoir (légèrement modifié)

1/ Soit f la fonction définie sur]0;+∞[par : $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$

a- Montrer que $\forall x \in [1;2]$, $f(x) \in [1;2]$.

b- Montrer que : $f(x) = x \iff x = \sqrt{x}$

2/ On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n);\ \forall n \in IN$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \in [1;2]$.

b- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$ puis que

$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$

c- Montrer par récurrence que $\forall n \in IN;\ \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\sqrt{2} - 1\right)$

d- En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 17

D'après un devoir

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = (-1)^n\sqrt{n} + 2$.

1/ Etudier la convergence de la suite (u_n).

2/ Soit la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = \dfrac{u_n - n}{2+n}$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ \dfrac{-\sqrt{n} - n + 2}{2+n} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{\sqrt{n} - n + 2}{2+n}$

b- En déduire que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.

3/ Soit la suite (w_n) définie sur IN par $w_n = \dfrac{\sin n - n}{2+\sqrt{n}}$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ w_n \leqslant -\sqrt{n} + 2$.

b- En déduire la limite de la suite (w_n).

Exercice 18

D'après un devoir (légèrement modifié)

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k} = -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n}$

1/a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

b) Montrer que $u_{2n+2} - u_{2n} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ et déduire que la suite (u_{2n}) est décroissante.

2/ Montrer que (u_{2n+1}) est croissante.

3/ Prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

4/ Montrer que (u_n) converge vers un réel L et que $u_3 \prec L \prec u_4$.