On considère la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par $\forall n \in IN^*$; $u_n = \frac{n^n}{n!}$

1/ Montrer que $\forall n \in IN^*; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2/a- Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

b- Déduire que $u_{n+1} \geq 2u_n$; $\forall n \in IN^*$

c- Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

Exercice 1 ⧫

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par : $u_0=0$ et $u_{n+1} = f(u_n);\ \forall n \in IN$
avec f : $x \mapsto \frac{1+x}{\sqrt{3+x^2}};\ \forall x \in IR$

1/a- Dresser le tableau de variation de f sur IR^+.

b- Montrer que $\forall n \in IN;\ 0 \leqslant u_n < 1$.

2/ Montrer que $\forall n \in IN;\ \frac{1+u_n}{2} \leqslant u_{n+1} \quad (*)$

3/ A l'aide de la relation $(*)$, étudier la monotonie de la suite (u_n).

4/a- Montrer que $\forall n \in IN;\ 0 \prec 1-u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(1-u_n)$ (on pourra profiter de la relation $(*)$)

b- Prouver donc que $\forall n \in IN;\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant u_n \prec 1$.

c- Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5/ Pour tout $n \in IN^*$ on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant S_n < n$.

b- Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 2 ⧫

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$u_0 = 5 \text{ et } u_{n+1}=\frac{4u_n^2-u_n+20}{u_n^2+4} \quad ;\forall n \in IN$$

1/ Vérifier que $u_{n+1}-4 = \frac{4-u_n}{u_n^2+4}$; $\forall n \in IN \qquad (1)$

2/ Montrer par récurrence que $\forall n \in IN;\ u_{2n} \succ 4$ et $u_{2n+1} \prec 4$. (on pourra profiter de (1))

3/a- Prouver que .$\forall n \in IN;\ |u_{n+1}-4| \leq \frac{1}{4}\ |u_n-4|$

b-

c- Montrer alors que (u_n) converge vers 4.

4/ Soit la suite $(S_n)_{n\in IN}$ par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n}(u_k-4)$

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ S_{2n+2}-S_{2n} = (u_{2n+1}-4)\left[1-\frac{1}{u_{2n+1}^2+4}\right]$

Déduire que la suite (S_{2n}) est décroissante.

b- Montrer que la suite (S_{2n+1}) est croissante.

c- Prouver que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

d- Montrer que (S_n) converge vers un réel L et que $S_3 \prec L \prec S_4$.

Exercice 3 — d'après un devoir

Soit la suite (u_n) définie sur IN* par : $u_2 = 2$ et $\forall n \in IN^*$ $u_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{u_n}$.

1/a- Calculer u_2 et u_3.

b- Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 2;\ n \prec u_n \prec n+1$.

c- Déduire que (u_n) est strictement croissante puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2/ On pose $v_n = u_n - n$ et $w_n = \frac{1}{v_n} - 1$ pour tout n$\in IN^*$.

a- Calculer w_1 et montrer que $\forall n \in IN^*;\ w_{n+1} = \dfrac{1}{w_n + \frac{1}{n}}$.

b- Montrer par récurrence que $\forall n \in IN^*;\ 1 - \frac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant 1$.

c- En déduire que les deux suites (w_n) et (v_n) sont convergentes et déterminer la limite de chacune.

3/ On pose $S_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} kw_k;\ \forall n \in IN^*$

a- Montrer que $\forall n \in IN^*;\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$.

b- En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 4 — origine inconnue (légèrement modifié)

Soit u la suite définie sur IN par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n};\ \forall n \in IN$

1/a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_{n+2} - 1 = \frac{u_n - 1}{3 + u_n}$.

b- Montrer par récurrence que $\forall n \in IN;\ u_n \succ 0$ et $u_{2n+1} \prec 1 \prec u_{2n}$.

2/a- Vérifier que pour tout $n \in IN;\ u_{n+2} - u_n = \frac{(1-u_n)(2+u_n)}{3+u_n}$

b- En déduire que (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.

3/ On pose pour tout $n \in IN;\ v_n = u_{2n} - u_{2n+1}$.

a- Montrer que pour tout $n \in IN;\ v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}v_n$

b- En déduire que pour tout $n \in IN;\ v_n \leqslant \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4/a- Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites adjacentes.

b- En déduire que u converge et déterminer sa limite.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$.

Soit (u_n)la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in IN;\ u_{n+1} = f(u_n)$

1/a- Montrer que $\forall n \in IN,\ u_n > 0$

b- Montrer que (u_n) est monotone.

c- En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2/a- Montrer que $\forall n \in IN,\ f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$.

b- Montrer que f est croissante sur $[0,1]$.

c- Montrer que $\forall n \in IN,\ u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

d- Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3/a- Soit $n \in IN$. Exprimer $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ en fonction de u_n.

b- En déduire que $\forall n \in IN,\ 1 \leqslant \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{n+1}$.

c- Montrer que $\forall n \in IN^*,\ n \leqslant \frac{1}{u_n} - 1 \leqslant n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

d- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$ puis retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/a- Montrer que $\forall n \in IN,\ \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b- Montrer que $\forall n \in IN, n \geqslant 5,\ \sqrt{n+1} \leqslant \frac{n}{2}$.

c- Montrer que $\forall n \in IN, n \geqslant 5,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sqrt{n+1}$

d- Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} (n\, u_n)$.