L. B. Monastir	Série n : 15	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :

Chapitres : Nombres Complexes + Limite - Continuité + Suite +...

Exercice 1 Du série de mon ami Amor Abbes

Soit u la suite définie sur IN par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$; $\forall n \in IN$

1/a- Montrer que pour tout n $\in IN$; $0 \prec u_n \leqslant 1$.

b- Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2/a- Etablir que pour tout n $\in IN$; $\frac{1-u_n}{1+u_n^2} \leqslant \frac{1}{1+u_n^2}$

b- En déduire pour tout n $\in IN$; 1- $u_{n+1} \leqslant \frac{4}{5}(1-u_n)$

c- Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

3/ Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$; n $\in IN^*$.

Montrer que pour tout n $\in IN^*$; $1 - \frac{5}{2n} \leqslant S_n \leqslant 1$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n)$.

4/ Soit pour tout n $\in IN$; $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$

a- Montrer que pour tout n $\in IN$; $v_{n+1} = v_n^2$ en déduire que $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$.

b- Soit $P_n = v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$ et $w_n = \frac{p_n}{v_{n+1}}$, n$\in IN$.

Calculer P_n et montrer que (w_n) est constante.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$.

Soit $(u_n) la$ suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in IN$; $u_{n+1} = f(u_n)$

1/a- Montrer que $\forall n \in IN,\ u_n > 0$

b- Montrer que (u_n) est monotone.

c- En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2/a- Montrer que $\forall n \in IN,\ f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$.

b- Montrer que f est croissante sur $[0,1]$.

c- Montrer que $\forall n \in IN,\ u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

d- Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3/a- Soit $n \in IN$. Exprimer $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ en fonction de u_n.

b- En déduire que $\forall n \in IN,\ 1 \leqslant \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{n+1}$.

c- Montrer que $\forall n \in IN^*,\ n \leqslant \frac{1}{u_n} - 1 \leqslant n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

d- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$ puis retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/a- Montrer que $\forall n \in IN,\ \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b- Montrer que $\forall n \in IN, n \geqslant 5,\ \sqrt{n+1} \leqslant \frac{n}{2}$.

c- Montrer que $\forall n \in IN, n \geqslant 5,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sqrt{n+1}$

d- Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} (n\, u_n)$.

Exercice 3 *origine inconnue* (légèrement modifié)

Soit u la suite définie sur IN par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$; $\forall n \in IN$

1/a- Montrer que $\forall n \in IN$; $u_{n+2} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{3+u_n}$.

b- Montrer par récurrence que $\forall n \in IN$; $u_n \succ 0$ et $u_{2n+1} \prec 1 \prec u_{2n}$.

2/a- Vérifier que pour tout $n \in IN$; $u_{n+2} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(2+u_n)}{3+u_n}$

b- En déduire que (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.

3/ On pose pour tout $n \in IN$; $v_n = u_{2n} - u_{2n+1}$.

a- Montrer que pour tout $n \in IN$; $v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n$

b- En déduire que pour tout $n \in IN$; $v_n \leqslant \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

4/a- Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites adjacentes.

b- En déduire que u converge et déterminer sa limite.

Exercice 2: (7 points)

On note, pour tout entier naturel $n \geq 3$, (E_n) l'équation $\dfrac{x^3}{x^2-1} = n$.

1. Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.
2. Montrer que pour tout entier n , $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une unique solution , notée x_n, sur l'intervalle $[2,+\infty[$.
3. Quelle est la monotonie de la suite (x_n) ?
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $n-1 \leq x_n \leq n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis de la suite de terme général $\dfrac{x_n}{n}$.
6. Donner une valeur approchée de x_3 par défaut à près 10^{-1}.

Exercice 5 D'après un devoir

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit l'application f de P\\$\{O\}$ vers P qui à tout point M(z) de P\\$\{O\}$ associe le point M'(z') tel que $z' = \overline{z} + \dfrac{z^2}{\overline{z}}$.

1/ Montrer que les points O, M et M' sont alignés.

2/a) Déterminer l'ensemble (E) des points M de P\\$\{O\}$ tel que f$(M) = O$.

b) Déterminer l'ensemble (F) des points invariants par f.

3/ Soit M un point de P\\$\{O\}$ avec M $\notin (E)$ et M $\notin (F)$. On note I =O $*M$ et N le symétrique de M' par rapport à $(O;\vec{u})$.

a) Montrer que $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux.

b) Trouver une construction géométrique de M' à l'aide de M.

4/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : \overline{z} + \dfrac{z^2}{\overline{z}} = 1+i$; $(E_1) : \overline{z} + \dfrac{z^2}{\overline{z}} = 2i$

Exercice 6 d'après un devoir

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^3 + (\sqrt{3}-i)z^2 + (1-i\sqrt{3})z - i = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

2/ En déduire les solutions de l'équation : $-iz^3 + (-\sqrt{3}+i)z^2 + (i+\sqrt{3})z - i = 0$

3/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct on donne les points

A et B d'affixes respectives i et $\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ et C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses. Déterminer l'ensemble E des points M tels que : $\text{MA}^2 - MB^2 + MC^2 = 2$.

4/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^9 + \left(\sqrt{3}-i\right)z^6 + \left(1-i\sqrt{3}\right)z^3 - i = 0$.

Exercice 7

1/ Soit $\varphi(x) = 2x^3 - 11x^2 + 20x - 14;\ \forall x \in IR$

a- Dresser le tableau de variation de φ.

b- Prouver que l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une seule solution α dans IR. Vérifier que $2,8 < \alpha < 2,9$.

c- Trouver alors le tableau de signe de $\varphi(x)$.

2/**a**- Etudier les variation de $f : x \mapsto x^2 - 3x + \frac{2}{x-2}$

b- Montrer que $f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9}{\alpha - 2}$; en déduire que $f(\alpha) > 0$.

c- Prouver donc que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement une seule solution dans IR.

Exercice 8 (Devoir de controle n:1 du prof : Hassen Hassine - Lycée Chebba)

Soit m un nombre complexe donné vérifiant : $\frac{-\pi}{4}$ est un argument de m.

Le plan complexe P étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par M', M'' et A les points d'affixes respectives $z'=\frac{1}{m}$, $z''=\frac{-i}{m}$ et $a=\frac{1}{2}$.

1)**a**- Déterminer un argument de z' et un argument de z''.

b- En déduire que M'' est l'image de M' par une symétrie que l'on précisera.

2) Déterminer l'ensemble P' des points $M(z)$ tel que $mz + i \neq 0$.

3) Soit f l'application de P' dans P' qui à tout point $M(z)$ de P' associe le point $M_1(z_1)$ avec $z_1 = \frac{z - \frac{1}{m}}{mz + i}$.

a- Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation $E : mz^2 - (1-i)z + \frac{1}{m} = 0$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E.

4) Vérifier que $OM'M''$ est un triangle rectangle et isocèle.

Déterminer m pour que l'aire de ce triangle soit égal à $\frac{1}{16}$.

Quelle est alors la nature du quadrilatère $OM'AM''$?

Exercice 9 (DC1 de mon ami : Raouf Thabet)

Soit m un nombre complexe non nul.

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2(im+1)z + 1 + 2im - 2m^2 = 0$

2/ On note $z_1 = 2m$, $z_2 = (1+i)m + 1$ et $z_3 = (-1+i)m + 1$

a- Déterminer m pour que $z_2 = 0$. Déterminer m pour que $z_3 = 0$ (on donnera les solutions sous forme algébrique)

b- Montrer que $|z_2| = |z_3| \iff m$ est imaginaire pur

3/ Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère les points M_1, M_2 et M_3 de P d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a- Montrer que $\frac{z_3}{z_1}$ est imaginaire pur $\iff |z_1 - 1| = 1$.

b- Montrer que lorsque $OM_1M_2M_3$ est un quadrilatère alors c'est un parallélogramme.

c- En déduire l'ensemble des points M_1 pour que $OM_1M_2M_3$ est un rectangle.

4/ On prend dans cette question $m = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

Exercice 10 D'après un devoir

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} f(x) = 3x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x + 1 & \text{si } x \in]-1, 0] \\ f(x) = 1 + 2\dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$

1/ Montrer que f est continue en 0 et en -1.

2/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3/a- Montrer que pour tout $x \succ 0$; $1 \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{4}{x}$.

b- En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4/ Montrer que léquation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1, 0[$.

5/a- Montrer que f est dérivable en zéro.

b- Etudier le dérivabilité de f à gauche en (-1). Intrtpréter graphiquement le résultat.

c- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.

6/ Soit h la fonction sur $]1; +\infty[$ par $h(x) = f\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

a- Calculer la limite de h à droite en 1.

b- Montrer que h est dérivable sur $]1; +\infty[$ et calculer $h'(x)$ pour tout réel x de $]1; +\infty[$.

Exercice 11

Soit la fonction $f : IR \to IR$; $x \mapsto f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \sin x + \frac{1}{2}x^2 - x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

C_f est la coube de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1/ Montrer que $\Delta : y = -1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.

2/a- Montrer que $\forall x > 0$; $f(x) \geqslant \frac{1}{2}x^2 - x - 1$.

b- Calculer donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c- Soit $g : IR^+ \to IR$; $x \mapsto \cos x + x - 1$

i) Montrer que g est croissante sur IR^+.

ii) Déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in IR^+$.

3/ Soit la fonction $u : x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$; $\forall x \in IR^-$

a- Résoudre l'équation $u(x) = 0$.

b- Déduire que $u(x) > 0$, $\forall x \in IR^-$

4/ Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

5/ Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 12

1/ Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 + x^2} - x$.

2/ Soit f la fonction défnie sur IR_+^* par: $f(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\cos(x)$.

a- Montrer que pour tout $x \in IR_+$ on a : $|f(x)| \leqslant \sqrt{1 + x^2} - x$.

b- Déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale que l'on précisera.

3/ Montrer que l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)}$ admet au moins une solution dans IR_+ .

4/ Soit g : x $\mapsto g(x) = \dfrac{f(x^2)}{2 + \sin x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$