L. B. Monastir	**Série n : 15**	**4 ème Math**
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n : **4**
Chapitre : Suites réelles + …		

Exercice 1 *Vrai - Faux* ..

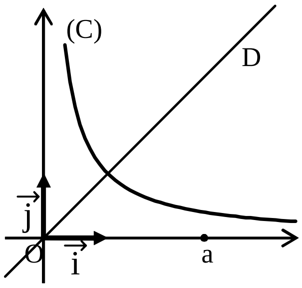
1/ Si (u_n) est suite divergente et bornée alors $v_n = \frac{u_n}{n}$ est aussi divergente. $\square$

2/ Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ vérifiant $\forall n \in IN; 0 \prec |u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|$.
(u_n) est convergente $\square$

Exercice 2 *QCM*

Choisir la bonne réponse

1/ Dans la figure ci-contre:
(C) est la courbe d'une fonction f et
Δ la droite d'équation $y = x$.
Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie par :
$u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n),\ \forall n \in IN$



a) (u_n) est croissante **b**) (u_n) est *divergente* **c**) (u_n) est *convergente*

2/ Soit la suite $u_n = \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]; \forall n \in IN^*$
La limite de (u_n) est :
a) $+\infty$ **b**) 1 **c**) 0

3/ Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{n}{n+1}u_n;\ \forall n \in IN^*$
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = -\infty$ **b**) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 0$ **c**) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty$

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n; \forall n \in IN \end{cases}$

1/**a**- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n > 0$.
b- Montrer que la suite (u_n) est croissante.
c- En déduire que $u_{n+1} \geqslant 3u_n;\ \forall n \in IN$
d- Montrer alors que $\forall n \in IN;\ u_n \geqslant 3^n$
e- Préciser alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2/ On considère la suite (S_n) définie sur IN* par : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$
a- Montrer que (S_n) est croissante.
b- Montrer que $1 \leqslant S_n \leqslant \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$
c- Déduire enfin que (S_n) converge vers un réel L et que L$\in \left[1;\ \frac{3}{2}\right]$

Exercice 2 *D'après un devoir*

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_n + 2}{1 + u_n};\ \forall n \in IN$

1/**a**- Mq $\forall n \in IN;\ 1 \prec u_n \leqslant 2$.
b- Etudier la monotonie de u.

En déduire que u est convergente et calculer sa limite.

2/a- Mq $\forall n \in IN;\ 0 \prec u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

b- Mq $\forall n \in IN;\ 0 \prec u_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver la limite de u.

3/ On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout k de IN^*.

a- Mq $\forall n \in IN^*;\ n \prec S_n \leqslant n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 3 *(Omar Al Khayam n:71 page : 44)*

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n};\ \forall n \in IN$.

1/ Montrer par récurrence que $\forall n \in IN,\ u_n > 0$.

2/ Prouver que (u_n) est strictement croissante.

3/ Démontrer que $\forall k \in IN;\quad 2 \leqslant (u_{k+1})^2 - (u_k)^2 \leqslant 2 + u_{k+1} - u_k$.

En déduire que pour tout entier naturel n;

$$2n \leqslant (u_n)^2 - 1 \leqslant 2n + u_n - 1$$

4/ Prouver que (u_n) diverge vers $+\infty$.

5/ Prouver que quel que soit le naturel n ; $1 - \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{2n}{(u_n)^2} \leqslant 1 - \frac{1}{(u_n)^2}$

puis que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{2n}}\right)$ a une limite réelle que l'on précisera.

Exercice 4

1/ Soit la suite U définie sur IN^* par :

$$u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in IN^*; u_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{u_n}.$$

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in IN^*;\ n \leqslant u_n \leqslant n + 1$.

b) En déduire la limite de la suite U.

2/ Soit la suite V définie sur IN^* par $v_n = \frac{1}{u_n - n} - 1$.

a) Montrer que $\forall n \in IN^*;\ v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \frac{1}{n}}$.

b) Calculer v_2 et montrer par récurrence que :

$$\forall n \in IN^*;\ 1 - \frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1.$$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - n)$.

3/ Soit la suite S définie sur IN^* par $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kv_k)$.

a) Montrer que $\forall n \in IN^*;\ S_n - \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(v_k - 1)$

b) En déduire que :$\forall n \in IN^*;\ \frac{-1}{n} \leqslant S_n - \frac{n+1}{2n} \leqslant 0$.

c) Montrer alors que la suite S converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 5 (***Ex 10 page 6 du tome 1 de la collection Math plus***)

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie sur IN par $\begin{cases} u_0 \in IR \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n; \forall n \in IN \end{cases}$

1/ Déterminer la valeur de u_0 pour que (u_n) soit une suite constante.

2/ On suppose que $u_0 > 0$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n > 0$.

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c- En déduire que $u_{n+1} \geqslant u_n(u_0 + 2)$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3/ Soit $u_0 \in IR$. On définie la suite (v_n) définie par $\forall n \in IN;\ v_n = 1 + u_n$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ v_{n+1} = (v_n)^2$. En déduire par récurrence que

$\forall n \in IN;\ v_n = (1+u_0)^{2^n}$

Vérifier alors que $u_n = (1+u_0)^{2^n} - 1$.

b- Montrer que : (u_n) converge si et seulement si $-2 < u_0 \leqslant 0$.

Supposons que (u_n) converge calculer sa limite.

4/ On prend $u_0 = 1$ et on considère la suite $t_n = \dfrac{1}{1+u_n}$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} t_n;\ \forall n \in IN^*$

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ 0 \leqslant t_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

b- Montrer que (S_n) est croissante et $1 \leqslant S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

En déduire que (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 6

Soit les suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par :

$u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$

On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1/ Montrer que la suite (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.

2/ Comparer v_n et w_n.

3/**a**) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

b) Déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel α.

4/ Déterminer un entier naturel n permettant d'avoir un encadrement de α d'amplitude inférieur à 10^{-2}.

Exercice 7 *D'après un devoir*

Soient les suites u et v définies sur IN^* par : $\forall n \in IN^*$

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n(n!)}$

1/ Montrer que u est croissante et v est décroissante.

2/**a**- Montrer que ; $n! \geqslant n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (n!)$.

b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n)$.

c- Déduire alors que les suites u et v sont adjacentes.

3/**a**- Montrer que les suites u et v sont convergentes vers une même $\forall n \in IN^*$ limite L et que $\forall n \in IN^*;\ u_n \leqslant L \leqslant v_n$.

b- Calculer u_3 et v_3. En déduire que $1{,}66 \prec L \prec 1{,}73$

Exercice 8

Exercice 9 *D'après un devoir*

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k} = -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n}$

1/**a**) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

b) Montrer que $u_{2n+2} - u_{2n} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ et déduire que la suite (u_{2n}) est décroissante.

2/ Montrer que (u_{2n+1}) est croissante.

3/ Prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

4/ Montrer que (u_n) converge vers un réel L et que $u_3 \prec L \prec u_4$.

Exercice 5 *Extrait d'une série d'un collègue*

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n};\ \forall n \in IN$

1/ Montrer que pour tout n de IN on a : $u_n \geqslant 1$.

2/ Montrer que (u_n) est croissante.

3/a- Montrer que si (u_n) est majorée alors (u_n) est converge vers -1.

b- Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/a- Montrer que pour tout n de IN on a : $u_{n+1} \succ u_n + \frac{1}{2}$.

b- Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5/ Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in IN;\ v_n = u_{n+1} - u_n$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ v_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$.

b- En déduire que (v_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 7 ..

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1/ Soit $h : P :\to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \bar{z} + 4i$.

a- Montrer que f est une isométrie.

b- Déterminer l'ensemble des points invariants de h.

c- En déduire la nature de h.

2/ Soit $f : P :\to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \bar{z}$

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

3/ Posons $g = f \circ R$. Déterminer et caractériser g.

Exercice 8 ..

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Soit $f : P :\to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tq $z' = -i\,\bar{z} + 1 - i$.

Soit S la symétrie orthogonal d'axe la droite $(O;\vec{u})$.

1/ Prouver que f est une isométrie.

2/ Soit $R = f \circ S$

a- Prouver que R est une isométrie.

b- Donner l'écriture complexe de R.

c- Prouver que R est une rotation.

3/a- Placer I le centre de R et tracer la droite D passant par I et parallèle à la droite $\Delta : y = x$.

b- Prouver que f $=$ S$_D$.

Exercice 10

ABC est un triangle équilatéral. Soit f l'isométrie qui n'a pas de point fixe et qui transforme A en B et B en C.

1/a) Prouver que f n'est pas une translation.

b) Déduire la nature de f.

2/ Posons $g = f \circ f$, D le point tel que ABDC est un parallélogramme et E le point tel que ABCE est un parallélogramme.

a) Déteminer g(A) et g(B).

b) Prouver que g n'a pas de point fixe.

c) Déduire les natures possibles de g.

3/ Posons h $= t_{\overrightarrow{BA}} \circ f$.

a) Montrer que h est une isométrie qui fixe A et différente de l'identité du plan.

b) Montrer que h ne peut pas être une rotation de centre A

c) Caractériser donc l'application h.

Exercice 11

Soit dans le plan P un carré direct $ABCD$ de centre I.

Soient les applications définies de P dans P par :

$$f = R_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad h = r_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AD)}.$$

1/ Caractériser l'application f.

2/**a**) Déterminer la droite Δ telle que $r_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)} = S_{(BD)} \circ S_{\Delta}$.

b) Caractériser alors h.

3/ Soit l'application φ définie de P dans P par : $\varphi = S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer l'image de A par φ.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

Exercice 12

ABCD est un losange direct de centre O.

1/ Déterminer la nature de $f = S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$.

2/ Soit $g = S_{(AB)} \circ f$. Montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale d'axe une droite Δ.

3/ La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe (AB) en I.

a) Caractériser la droite Δ' tel que $f = S_{\Delta'} \circ S_{(OI)}$.

b) Déterminer alors la nature de g.