L. B. Monastir	Série n : 17	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaier		Séance n : 7

Chapitres : **Isométries du plan + Dérivabilités+…**

EXERCICE 1

1/ Si $\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]' = \frac{1}{x^4}$ *alors* $f'(t) = -t^2$ ☐

2/ La fonction $f : x \mapsto (5-x)\sqrt{5-x}$ est dérivable à gauche en 5 ☐

3/ Soit $h : \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \to IR, x \mapsto x\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

La courbe de h admet au moins deux tangentes horizontales ☐.

EXERCICE 2

Soit f : x $\mapsto f(x) = 1 + x + x^2 - x^3 + x^4$

1/ La courbe de f admet-elle des points d'inflexions ?

2/ Montrer que $\forall x \in \left[0;\ 10^{-1}\right];\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1,174$

3/ En déduire que $\forall x \in \left]0;\ \frac{1}{10}\right];\ 1 \leqslant f(x) \leqslant 1 + 1,174x$

EXERCICE 3 *Omar Al Khayam n:98*

Soit f une fonction dérivable sur [-1;0[$\cup$]0;2] dont le tableau de variation de f' est le suivant:

x	-1		0		1		2
f'(x)	1	↘	-2 ‖ 2	↘	-1	↗	3

On désigne par C_f sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

1/ Déterminer le nombre des tangentes à C_f parallèles à la droite d'équation y=$\frac{1}{2}x$. Justifier.

2/ Montrer que pour tout a et b de l'intervalle $[0;2]$ on a

$|f(b) - f(a)| \leqslant 3|b-a|$

Exercice 4

Dans la figure ci-dessous: C' la courbe représentative de f' la fonction dérivée de f de courbe C passant par par le point A$(0; f(0) = 2)$.

f est deux fois dérivable sur $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$.

1/**a**- Prouver que l'équation de T la tangente à C en A a pour équation

$y = x + 2$

b- Donner une valeur approchée de f$(0,001)$

2/ Expliquer puis donner le tableau de signe de $(f(x) - 2)$ pour x $\in \left[-\frac{3}{2};2\right]$

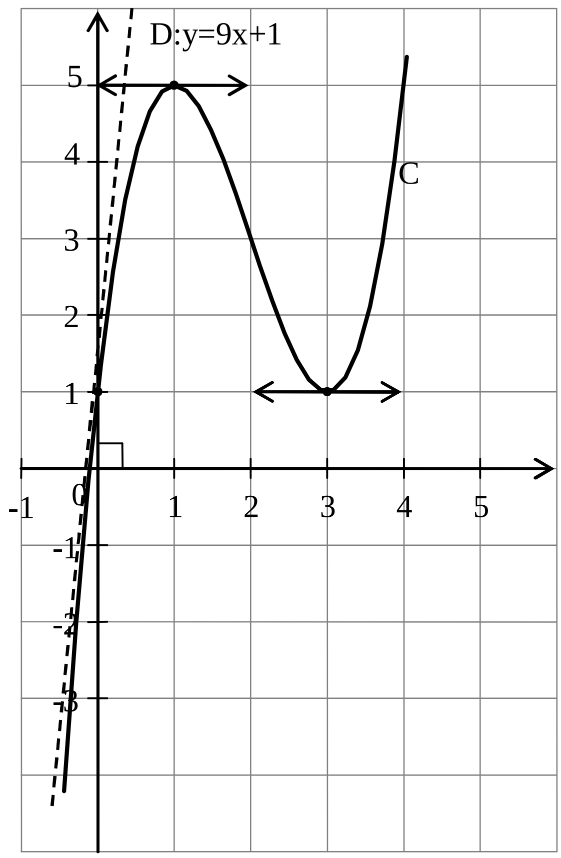
3/**a**- Montrer que le point A$(0;2)$ n'est pas un point d'inflexion de C.

b- Montrer que C admet deux points d'inflexions.

4/ Sachant que f$\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$ montrer que $\forall x \in \left[-\frac{3}{2};2\right];\ |f(x)| \leqslant 3x + \frac{9}{2}$.

Exercice 5

Dans la figure ci-dessous la courbe C d'une fonction f dérivable sur IR
D:y=9x+1 est la tangente à C en sont point A d'abscissse 0



1/ Déterminer en justifiant la valeur de $f'(1)$.

2/ Déterminer $f(0)$

3/ Prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = \ldots\ldots$

4/ Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, justifier votre réponse.

5/ Soit la fonction g: x $\mapsto f(\cos(x));\ \forall x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

a- Prouver que g est dérivable sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b- Déterminer en justifiant le signe de g'$(x);\ \forall x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

c- Donner une équation de Δ la demi tangente à la courbe de g en son point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 6

Soit x un réel de IR_+^*. Pour tout t de [0,x] on pose

$\varphi(t) = \sin(x) - \sin(t) - (x-t)\cos(t) - \frac{[\sin(x)-x]}{x^2}.(x-t)^2$

1) Ecrire l'expression de $\varphi'(t)$ pour tout t de $]0,x[$.

2)**a**/ Vérifier que $\varphi(0) = \varphi(x)$

b/ En déduire qu'il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que $\varphi'[c] = 0$.

3) Déduire de ce qui précède que le réel c vérifie:
$\sin(x) = x - \frac{x^2}{2}\sin(c)$.

4) Calculer enfin $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2}$.

EXERCICE 7

Soit la fonction f : $x \mapsto f(x) = \sqrt{x+3}$; $\forall x \geqslant 0$.

1/**a**- Donner le tableau de signe de $f''(x)$; $\forall x \geqslant 0$.

b- La courbe de f admet-elle des points d'inflexions ?

2/ Montrer que $\forall x \geqslant 0$; $0 \prec f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3/ Déterminer le réel α solution de l'équation $f(x) = x$

4/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par :$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$;$\forall n \in IN$

a- Montrer que $\forall n \in IN$; $u_n \prec \alpha$.

b- Prouver que $\forall n \in IN$; $0 \prec \alpha - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(\alpha - u_n)$.

c- Déduire que $\forall n \in IN$; $0 \prec \alpha - u_n \leqslant \alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

d- Prouver que (u_n) converge.

EXERCICE 8

ABCD est un carré direct de centre O. Soit f une isométrie transformant A en C et B en D.

1/ Prouver que f ne peut pas avoir une droite fixe point par point.

2/ Supposons que f possède un seul point fixe. Prouver que f ne peut être que la rotation de centre O et d'angle π.

3/ Supposons que f n'a pas de point fixe.

a- Prouver que f n'est pas une translation.

b- à modifier

Désignons par Δ la médiatrice du segment $[AB]$ et I et J sont les points d'intersection de Δ avec respectivement (DC) *et* (AB).

Prouver que $f \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{AD}}$ en déduire la nature de *f*.

EXERCICE 9

Soit dans le plan P un carré direct $ABCD$ de centre I.

Soient les applications définies de P dans P par :

$f = R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ et $h = r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AD)}$.

1/ Caractériser l'application *f*.

2/**a**) Déterminer la droite Δ telle que $r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(BD)} \circ S_\Delta$.

b) Caractériser alors h.

3/ Soit l'application φ définie de P dans P par : $\varphi = S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer l'image de A par φ.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

EXERCICE 10

ABC est un triangle équilatéral. Soit f l'isométrie qui n'a pas de point fixe et qui transforme A en B et B en C.

1/**a**) Prouver que f n'est pas une translation.

b) Déduire la nature de f.

2/ Posons $g = f \circ f$, D le point tel que ABDC est un parallélogramme et E le point tel que ABCE est un parallélogramme.

a) Déteminer g(A) et g(B).

b) Prouver que g n'a pas de point fixe.

c) Déduire les natures possibles de g.

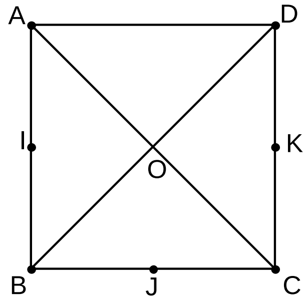
3/ Posons h $= t_{\overrightarrow{BA}} \circ f$.

a) Montrer que h est une isométrie qui fixe A et différente de l'identité du plan.

b) Montrer que h ne peut pas être une rotation de centre A

c) Caractériser donc l'application h.

<u>EXERCICE 11</u>



Dans la figure ci-contre:

- $ABCD$ est un carret direct de centre O
- $I = A * B$; $J = B * C$ et $K = C * D$

1/**a**- Montrer qu'il existe une seulle rotation f telle que $f(C) = J$ et $f(J) = O.$ Déterminer l'angle de f.

b- Déterminer $f \circ f$ en déduire que f est une rotation de centre $\Omega = O * C$.

2/**a**- Préciser $f(O)$ en déduire $f(I)$ (on remarque que $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{OI}$).

b- Quelle est la nature du triangle ΩID ?

3/ On pose $g = t_{\overrightarrow{CJ}} \circ f$, $h = S_{(BD)} \circ g$ et $\varphi = h \circ S_{(AB)}$.

a- Préciser $g(O)$ puis caractériser g en déduire l'image du carré $ABCD$ par g.

b- Préciser $h(O)$ et $h(J)$ puis caractériser h et φ.

<u>EXERCICE 12</u>

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1/Soit $f: P :\rightarrow P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = -iz + 2i$.

a- Prouver que f est une isométrie qui possède un seul point fixe

b- Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

2/ Soit $h = f \circ S$ avec S la symétrie orthogonale d'axe $(O;\vec{u})$

a- Montrer que f est une isométrie.

b- Soit $M(z)$ d'image $M'(z')$ par h. Exprimer z' en fonction de z.

c- En déduire la nature de h.

3/ Posons $g = S \circ h.$ Montrer que g est une translation que l'on caractérisera.