L. B. Monastir	**Série n : 17**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n : 7

Chapitres : Suites Réelles + complexe + lim + continuité + …

Exercice 1 Vrai - Faux

1/ Si une droite Δ est asymptote oblique à une courbe C d'une fonction f alors Δ et C n'ont pas de point d'intersection. ☐

2/ La fonction f:x$\mapsto$ $\sqrt{x^2-2x+3}-x+1$ garde un signe constant sur IR. ☐

3/ Soit $f(x)=3x+\cos x+7$

a- f a un seul sens de variation sur IR. ☐

b- l'équation $3x+\cos x=-7$ admet au moins deux solutions dans IR. ☐

4/ Soit f une fonction continue sur $[2,\ 7]$ et $f([2,\ 7])=[2,\ 7]$.
l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $[2,\ 7]$ ☐

Exercice 2 QCM

Choisir la réponse correcte.

1/ z et z' sont deux nombres complexes tels que :

$|z|=|z'|=r$, $\arg z'\equiv\theta-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ avec $\arg z\equiv\theta\ [2\pi]$

a) $z'=-z$ **b**) $z'=-iz$ **c**) $z'=iz$

2/ E={ $M(z)\in P$ tel que $\arg\left(\frac{z+i}{z-2}\right)\equiv\pi\ \ [2\pi]$}

a) E est inclus dans un segment

b) E est une droite privée de deux points

c) E est un cercle privé de deux points

3/ z et z' sont les affixes respectives des points M et M' et ils sont tels que $\arg z'\equiv\arg z\ \ [2\pi]$. On a :

a) $OM=OM'$ **b**) OMM' est un triangle. **c**) $O,\ M$ et M' sont alignés.

4/ $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan.
z et z' sont les affixes respectives des points M et M' et ils sont tels que $\arg z'\equiv-\arg z\ \ [2\pi]$. On a

a) $M'\in S_{(O,\vec{u})}((OM))$ **b**) $M'\in S_O((OM))$ **c**) $M'\in S_{(O,\vec{v})}((OM))$

Exercice 3 d'après un devoir

Soit $n\in IN$ tel que $n\geq4$. Soit la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par $f_n(x)=\sin(\pi x)+nx-1$.

1/a- Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ possède une seule solution u_n dans]0,1[. On construit ainsi une suite (u_n) définie $IN\backslash\{0,1,2,3\}$

b- Donner une valeur approchée de u_5 à 0,25 prés.

2/a- Montrer que $\forall x\in[0;1]$; $f_{n+1}(x)\geq f_n(x)$.

b- Déduire que (u_n) est décroissante puis qu'elle converge

3/a- Calculer $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

b- Trouver donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Exercice 4

Soit la fonction $f:\ IR\to IR;x\mapsto\frac{\sin[\sin x]}{x}\quad si\ x\neq0\ et\ f(0)=0$

1/a- Montrer que $\forall x>0;\quad -\frac{1}{x}\leq f(x)\leq\frac{1}{x}$.

b- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat.

2/a- Montrer que f est une fonction paire.

b- Calculer alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3/ Prouver que f est continue en 0

4/a- Etudier le sens de variation de la fonction $u : x \mapsto \sin x - x$ sur IR$^+$.

b- Déduire que $\forall x \in IR^+; \sin x \leq x$

c- Prouver donc que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[; \sin[\sin x] \leq \sin x$.

d- En déduire que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[; f(x) \leq 1$.

Exercice 5

Soit $f: \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \to IR;\ x \mapsto \sqrt{1 + \sin^2 x}$.

1- Dresser le tableau de variation de f

2- Tracer C_f, la courbe de f, dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

3-a)Montrer que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[; |f'(x)| < 1$ déduire que $-1 < f'(x) < 0$.

b) Prouver alors que $f(x) = -x$ admet une seule solution a dans $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

c) Vérifer que $\tan(a) = -\sqrt{\frac{a^2 - 1}{2 - a^2}}$.

Exercice 6

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$.

On note A et B les points d'affixes respectives i et $i\sqrt{3}$.

Soit $f : P \backslash \{A\} \to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \frac{z - i}{z - i\sqrt{3}}$.

1/ Dans cette question , on prend $z = 1$ et z' le complexe qui lui associé.

a- Donner la forme algébrique de z' .

b- Donner la forme exponentielle de z'.

c- Déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

d- Prouver que $(z')^{2010} \in (iIR_-^*)$.

2/ Soit l'ensemble E des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$.

Prouver que E est la médiatrice de $[AB]$.

3/ Dans cette question on prend un point $M(z)$ de E.

a- Montrer que $M'(z)$ appartient à un cercle que l'on précisera.

b- Vérifier que $(z' - 1)\left(z - i\sqrt{3}\right) = \left(-\sqrt{3} - 1\right)i$; déduire que

$\widehat{\left(\vec{u}, \overrightarrow{CM'}\right)} \equiv -\frac{\pi}{2} - \widehat{\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right)}$ $[2\pi]$ avec C le point d'affixe 1.

c- Soit M_1 le symétrique de M par rapport à le droite de repère $(B, \vec{u})$.

Montrer que $(CM') \perp (BM_1)$.

d- Expliquer donc comment construire M'.

Exercice 7

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{3 + 2u_n}{1 + u_n}$; $\forall n \in IN$

1/a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \geqslant 1$.

b- Déduire que la suite $(u_n)_{n \in IN}$ est croissante.

2/a- Montrer par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée.

b- Préciser alors la limite de (u_n).

3/a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_{n+1} \geqslant u_n + 2$.

b- Déduire que $\forall n \in IN;\ u_n \geqslant 2n + 1$

4/a- Montrer que $\forall k \in IN;\ 2 \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 3$

b- Déduire que $\forall n \in IN; n(n+1) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k(u_{k+1}-u_k) \leqslant \frac{3n(n+1)}{2}$

c- Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n} k(u_{k+1}-u_k) \right]$

EXERCICE2 (5pts) :

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 \in IR$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1+U_n^2}{-1+U_n}$.

I) On suppose que $U_0 > 1$.

1)a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n > 1$ et que $U_{n+1} - U_n > 1$.

b) Montrer que U n'est pas majorée et donner sa limite.

II) On pose $U_0 = -\frac{1}{2}$.

1)a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < U_n < 0$.

b) Montrer que la suite U est décroissante puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n \in IN$, $U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2}(U_n + 1)$ puis déduire que $\forall n \in IN$, $U_n + 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

b) Retrouver alors la limite de la suite U.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(U_k + 1)$.

a) Montrer que la suite S est croissante. b) Montrer que la suite S est majorée par 1.

4) Soit V la suite définie sur IN par : $V_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n + \sqrt{V_n^2 - U_n}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - V_n \geq -U_n$ puis déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \geq n - S_n + 1$.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} V_n$.

EXERCICE4 (6pts) :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A le point d'affixe $-1+i$ et θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$. On considère l'équation $(E): z^2 - 2iz - 1 - ie^{i2\theta} = 0$. On désigne par z_1 *et* z_2 les solutions de (E).

1)a) Déterminer la valeur de θ pour que $z_0 = 1+i$ soit une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E) pour la valeur de θ trouvée.

2) Montrer, sans résoudre (E), que $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta + \frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). b) Ecrire les solutions sous formes exponentielles.

4) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $i + e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$ *et* $i - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$.

a) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe J que l'on précisera.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie dans $\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$. En déduire l'ensemble des points M_2.

5) Soit f l'application du plan $P\setminus\{A\}$ dans le plan P qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z'=\dfrac{z^2}{z+1-i}$.

a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

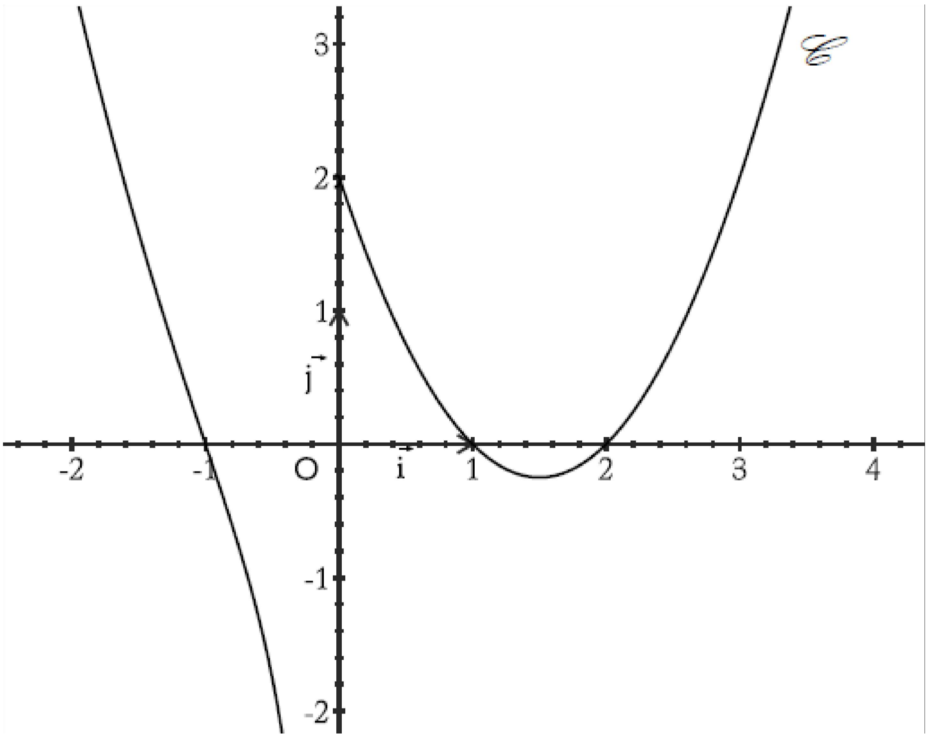
c) Montrer que pour tout point M de $P\setminus\{A\}$ on a : $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})\equiv(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})\left[2\pi\right]$. En déduire l'ensemble des points M tels que O , M et M ' soient alignés.

<u>EXERCICE 1 :</u> (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

A. Le graphique ci-contre est la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ et telle que :

- ✓ La droite des ordonnées est une asymptote à $\mathscr{C}$
- ✓ $\mathscr{C}$ admet deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$



1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ égal à :

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) 1

2) Le domaine de définition de $f\circ f$ est:

a) $\mathbb{R}^*$ b) $\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$ c) $\mathbb{R}^*-\{-1,1\}$ d) $\mathbb{R}^*-\{-1,1,2\}$

3) Le nombre de solutions de l'équation $f\circ f(x)=-x$ dans $\left]0,1\right[$ est :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

4) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f\circ f(x)}{x}$ égal à :

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) 1