Exercice 1

Soient les points $A(-1)$, $B(i-1)$, $C(1)$ et $M(e^{i\theta})$ avec $\theta \in]-\pi;0[$

1/ Déterminer θ pour que ABM soit isocèle en A.

2/ Déterminer θ pour que M appartient au cercle de centre C et de rayon $\sqrt{3}$.

Exercice 2

1/ Donner la forme exponentielle de $\sqrt{3}+i$ puis déduire celle de $-2\sqrt{3}-2i$.

2/ Soit le complexe $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Calculer α^2.

3/ A l'aide des questions précédentes trouver la forme exponentielle de α.

4/ Déduire enfin les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 3 *(d'après un devoir)*

Soit $\theta \in]0,\pi[$. On donne dans le plan complexe muni d'un RON direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points $A(-2)$, $M_1(z_1 = -1+e^{i\theta})$ et $M_2(z_2 = -1-e^{i\theta})$

1/ Mettre sous forme exponentielle z_1 et $\frac{z_1}{z_2}$.

2/**a**- Montrer que les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fix I que l'on déterminera.

b- Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M_1 quand θ varie.

c- En déduire l'ensemble Γ_2 des points M_2 quand θ varie.

3/ Montrer que OM_1AM_2 est un rectangle puis déterminer la valeur de θ pour laquelle on obtient un carré.

Exercice 4.

Soit $u = e^{i\frac{\pi}{7}}$, Donner la forme exponentielle de $v = u + e^{i\frac{\pi}{6}}\bar{u}$.

Exercice 5

1/ Montrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}$

2/ Déduire alors le module et un argument de $1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}}$

3/ A l'aide de **1**/;calculer $1 + \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$.

Exercice 6

$\theta \in]-\pi;\pi[. z_\theta = \frac{1}{2}(1+e^{i\theta})^2$.

1/ Vérifier que $z_\theta e^{-i\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}(2+e^{i\theta}+e^{-i\theta})e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2/ Déduire que $z_\theta e^{-i\frac{\theta}{2}} = (1+\cos\theta)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

3/ Trouver enfin la forme exponentielle de z_θ.

Exercice 7 bac

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation E.

2/ Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

On considère les points A et B d'affixes respectives $1+ia$ et $1-ia$.

On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels.

a- Montrer que les points O,A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.

b- Mq les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a|=1$

3/ On suppose $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

a- Vérifier que $\forall x \in IR$; $1+e^{ix}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1-e^{ix}=-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$

b- En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes $1+ia$ et $1-ia$.

c- Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

Exercice 8 *bac 2001 s. principale*

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où $a \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$

Soit f :P$\setminus\{B\}$ →P;$M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \frac{z-a}{z-1}$.

1/ Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation **E** : $z^2 - 2z + a = 0$.

2/**a**- On suppose que $a = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$. Résoudre **E**.

b- Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de **E**.

3/ Dans cette question on suppose a=-1. Soit $M(z) \in$P$\setminus\{B\}$ et $M'(z')$

a- Montrer que $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)} + \widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0 \quad [2\pi]$.

En déduire que la demi-droite $[BA)$ est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}\right)$.

b- Montrer que z' est un imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

c- En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.