L. B. Monastir	Série n : 20	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n : 3
Chapitres : Suites réelles + Complexe + Dérivabilité + isométrie + …		

EXERCICE 1

1/ Si $\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]' = \frac{1}{x^4}$ *alors* $f'(t) = -t^2$ ☐

2/ La fonction $f : x \mapsto (5-x)\sqrt{5-x}$ est dérivable à gauche en 5 ☐

3/ Soit $h : \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \to IR, x \mapsto x\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

La courbe de h admet au moins deux tangentes horizontales ☐.

EXERCICE 2

Soit f : x $\mapsto f(x) = 1 + x + x^2 - x^3 + x^4$

1/ La courbe de f admet-elle des points d'inflexions ?

2/ Montrer que $\forall x \in \left[0;\ 10^{-1}\right];\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1,174$

3/ En déduire que $\forall x \in \left]0;\ \frac{1}{10}\right];\ 1 \leqslant f(x) \leqslant 1 + 1,174x$

EXERCICE 3 *Omar Al Khayam n:98*

Soit f une fonction dérivable sur [-1;0[$\cup$]0;2] dont le tableau de variation de f' est le suivant:

x	-1		0		1		2
f'(x)	1	↘	-2 ‖ 2	↘	-1	↗	3

On désigne par C_f sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

1/ Déterminer le nombre des tangentes à C_f parallèles à la droite d'équation y=$\frac{1}{2}x$. Justifier.

2/ Montrer que pour tout a et b de l'intervalle $[0;2]$ on a

$|f(b) - f(a)| \leqslant 3|b-a|$

Exercice 4

Dans la figure ci-dessous: C' la courbe représentative de f' la fonction dérivée de f de courbe C passant par par le point A$(0; f(0) = 2)$.

f est deux fois dérivable sur $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$.

1/**a**- Prouver que l'équation de T la tangente à C en A a pour équation

$y = x + 2$

b- Donner une valeur approchée de f$(0{,}001)$

2/ Expliquer puis donner le tableau de signe de $(f(x) - 2)$ pour x $\in \left[-\frac{3}{2};2\right]$

3/**a**- Montrer que le point A$(0;2)$ n'est pas un point d'inflexion de C.

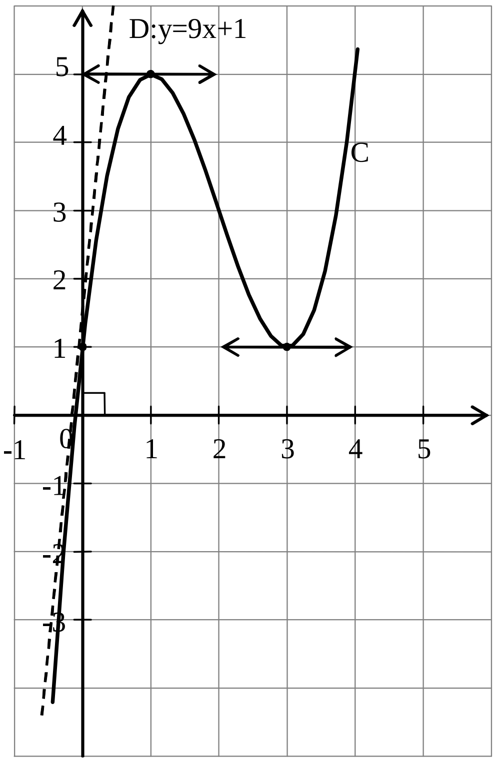
b- Montrer que C admet deux points d'inflexions.

4/ Sachant que f$\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$ montrer que $\forall x \in \left[-\frac{3}{2};2\right];\ |f(x)| \leqslant 3x + \frac{9}{2}$.

Exercice 5

Dans la figure ci-dessous la courbe C d'une fonction f dérivable sur IR

D:y=9x+1 est la tangente à C en sont point A d'abscissse 0



1/ Déterminer en justifiant la valeur de $f'(1)$.

2/ Déterminer $f(0)$

3/ Prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = \ldots\ldots$

4/ Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, justifier votre réponse.

5/ Soit la fonction g: x $\mapsto f(\cos(x));\ \forall x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

a- Prouver que g est dérivable sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b- Déterminer en justifiant le signe de g'$(x);\ \forall x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

c- Donner une équation de Δ la demi tangente à la courbe de g en son point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 6

Soit x un réel de IR_+^*. Pour tout t de [0,x] on pose

$\varphi(t) = \sin(x) - \sin(t) - (x-t)\cos(t) - \frac{[\sin(x)-x]}{x^2}.(x-t)^2$

1) Ecrire l'expression de $\varphi'(t)$ pour tout t de $]0,x[$.

2)**a**/ Vérifier que $\varphi(0) = \varphi(x)$

b/ En déduire qu'il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que $\varphi'[c] = 0$.

3) Déduire de ce qui précède que le réel c vérifie:

$\sin(x) = x - \frac{x^2}{2}\sin(c)$.

4) Calculer enfin $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2}$.

EXERCICE 7

Soit la fonction f : $x \mapsto f(x) = \sqrt{x+3}$; $\forall x \geqslant 0$.

1/**a**- Donner le tableau de signe de $f''(x)$; $\forall x \geqslant 0$.

b- La courbe de f admet-elle des points d'inflexions ?

2/ Montrer que $\forall x \geqslant 0;\ 0 \prec f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

3/ Déterminer le réel α solution de l'équation $f(x) = x$

4/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par :$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$;$\forall n \in IN$

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ u_n \prec \alpha$.

b- Prouver que $\forall n \in IN;\ 0 \prec \alpha - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(\alpha - u_n)$.

c- Déduire que $\forall n \in IN;\ 0 \prec \alpha - u_n \leqslant \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d- Prouver que (u_n) converge.

EXERCICE 8 Vrai - Faux

1/ Soient ABC est un triangle équilatéral et f est une isométrie telle que f$(A) = B$ et f$(B) = C$.

a) f est une symétrie orthogonale ☐

b) Si f n'a pas de point fixe alors f est une symétrie glissante ☐

c) Si f n'est pas une symétrie glissante alors f est une rotation ☐

2/ Soit Δ une droite et $\vec{u}$ un vecteur de direction orthogonale à celle de Δ. On a f=$t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ est une rotation. ☐

3/ Soient Δ, Δ' et Δ'' telles que $\Delta // \Delta'$ et $\Delta \perp \Delta''$. On a

$S_\Delta \circ S_{\Delta'} \circ S_{\Delta''} = S_{\Delta''} \circ S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ ☐

EXERCICE 9

EXERCICE 10

ABC est un triangle équilatéral. Soit f l'isométrie qui n'a pas de point fixe et qui transforme A en B et B en C.

1/**a**) Prouver que f n'est pas une translation.

b) Déduire la nature de f.

2/ Posons $g = f \circ f$, D le point tel que ABDC est un parallélogramme et E le point tel que ABCE est un parallélogramme.

a) Déteminer g(A) et g(B).

b) Prouver que g n'a pas de point fixe.

3/ Posons h = $t_{\overrightarrow{BA}} \circ f$.

a) Montrer que h est une isométrie qui fixe A et différente de l'identité du plan.

b) Montrer que h ne peut pas être une rotation de centre A

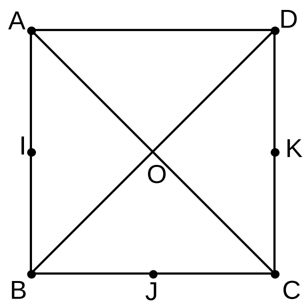
c) Caractériser donc l'application h.

EXERCICE 11

Dans la figure ci-contre:

- $ABCD$ est un carret direct de centre O
- $I = A * B$; $J = B * C$ et $K = C * D$

1/**a**- Montrer qu'il existe une seulle rotation f telle que $f(C) = J$ et $f(J) = O$. Déterminer l'angle de f.



b- Déterminer $f \circ f$ en déduire que f est une rotation de centre $\Omega = O * C$.

2/**a**- Préciser $f(O)$ en déduire $f(I)$ (on remarque que $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{OI}$).

b- Quelle est la nature du triangle ΩID ?

3/ On pose $g = t_{\overrightarrow{CJ}} \circ f,\ h = S_{(BD)} \circ g$ et $\varphi = h \circ S_{(AB)}$.

a- Préciser $g(O)$ puis caractériser g en déduire l'image du carré $ABCD$ par g.

b- Préciser $h(O)$ et $h(J)$ puis caractériser h et φ.

EXERCICE 12

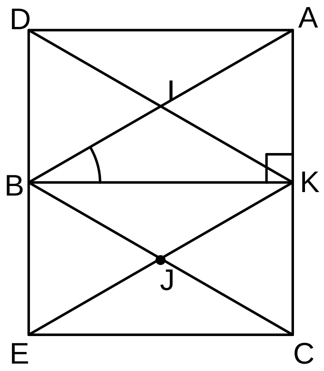
ADBK est un rectangle de centre I tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BA}\right)} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. C=$S_{(BK)}(A)$

J=B$*C = K * E$. B'=$S_{(AD)}(B)$.

Soit f l'isométrie qui n'a pas de point fixe et qui transforme A en B et B en C.

1/**a**- Prouver que ABC est équilatéral.

b- Prouver que (IJ) est la médiatrice de $[KB]$.



2/ Prouver que f n'est pas une translation. Déduire la nature de f.

3/ Montrer que $f(I) = J$ et $f(K) = E$

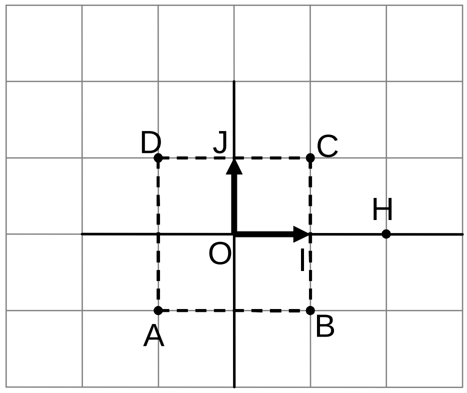
4/ Soit l'isométrie $\varphi = f \circ S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$

a) Déterminer $\varphi(J)$ et $\varphi(C)$ et $\varphi(E)$

b) Déduire que $f = t_{\overrightarrow{IJ}} \circ S_{(IJ)}$.

EXERCICE 5 *D'après un devoir*

On donne dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct (O,$\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$) la figure ci-contre.



1/ Soit f l'isométrie du plan tel que f$(C) = B$, f$(A) = D$ et f$(D) = C$

a) Déterminer f(O) et $f \circ f(D)$.

b) En déduire que f est une rotation dont déterminera le centre et l'angle.

2/ Soit g : P → P; M$(z) \to M'(z')$ avec $z' = -i\overline{z} + (1+i)$

a) Montrer que g est une isométrie du plan .

b) Déterminer g(I) et g(J), en déduire la nature de g.

c) Déterminer g(O), $g(H)$ et $g(B)$.

3/ Soit h : P → P; M$(z) \to M'(z')$ avec $z' = -i\overline{z} + 2$

a) Montrer que h est une isométrie du plan .

b) Déterminer h(C), $h(D)$ et $h(O)$.

c) En déduire que h n'a pas des points invariants, puis déterminer sa nature.

d) Vérifier que h =g$\circ t_{\overrightarrow{OB}}$.

4/ Déterminer $h^{-1} \circ f(D)$ et $h^{-1} \circ f(C)$, puis la nature de h$^{-1} \circ f$.