L. B. Monastir	Série N : 22	4ème Math
P.P. : Ali Zouhaier		
Chapitre : Les isométries		

Exercice 1

Soit f : P → P; $M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = -y+3 \\ \text{y} = \text{x+2} \end{cases}$

1/ Montrer que f est une isométrie.

2/ Déteminer les points M(x,y) tel que f$(M) = M$.

3/ Déduire la nature exacte de f.

Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle en A et non équilatéral. Désignons par I le mileu du segment $[BC]$.

Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant ABC.

1/ Montrer que $f(A) \neq B$ (on admet aussi que $f(A) \neq C$)

2/ Prouver que f fixe I.

3/ Déterminer les natures possibles de f.

Exercice 3

ABC est un triangle équilatéral. Soit f une ismétrie qui envoie A en B et B en C

1/ Montrer que si f n'a pas de point fixe alors f est une symétrie glissante.

2/ Dans cette question on suppose que f n'est pas une symétrie glissante.

a- Montrer que f ne peut pas être une symétrie orthogonale.

b- Déduire la nature de f.

Exercice 4

ABCD est un losange direct de centre O.

1/ Déterminer la nature de $f = S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$.

2/ Soit $g = S_{(AB)} \circ f$. Montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale d'axe une droite Δ.

3/ La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe (AB) en I.

a) Caractériser la droite Δ' tel que $f = S_{\Delta'} \circ S_{(OI)}$.

b) Déterminer alors la nature de g.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit f : $P \to P$; $M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = y+2 \\ y' = x-1 \end{cases}$

1/ Déterminer les coordonnées de O'=$f(O)$ et de A'=$f(A)$ avec $A(0,1)$.

2/ Montrer que f est une isométrie.

3/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

4/ Prouver que f est une symétrie glissante.

Exercice 6

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On donne les points B$(2+2i)$; $D(2+i)$ et $C(3i)$

1/**a**- Montrer qu'il existe une seule rotation R telle que $R(O)$=C et $R(B)$=D.

b- Préciser l'angle et le centre I de R.

2/ Soit f : $P :\to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = -iz+2i$.

a- Prouver que f est une isométrie qui possède un seul point fixe

b- Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

3/ Posons $g = f \circ R.$ Déterminer et caractériser g.

4/ Soit $h : P :\to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \overline{z} + 4i$.

a- Montrer que f est une isométrie.

b- Déterminer l'ensemble des points invariants de h.

c- En déduire la nature de h.

Exercice 7

Etant donné deux point distincts A et B. Désignons par I le milieux du segment $[AB].$ Déterminer toutes les isométries f telle que $f([AB]) = [AB].$

Exercice 8 (**act 4 page 44**)

Soit ABCD un carré direct. On désigne par S la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de $[BC]$ et par T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1/**a**- Déterminer les images par $S \circ T$ des points A, B et D.

b- Identifier $S \circ T$.

2/**a**- Déterminer les images par $T \circ S$ des points C, D et A.

b- Identifier $T \circ S$.

3/ En déduire la nature de $S \circ T \circ T \circ S$.

Exercice 9 (**ex 9 page 51**)

ABC est un triangle équilatéral direct. On désigne par I le milieu de $[AC]$ et par Δ la droite passant par B et parallèle à $(AC).$ Soit J un point de $[BA]$ distinct de B. La parallèle à (AC) passant par J et parallèle à (AC) coupe $[BC]$ en un point K.

1/ Caractériser $S_{(AC)} \circ S_{\Delta}$ et $S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$.

2/ Identifier f $= S_{(AC)} \circ S_{\Delta} \circ S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$.

3/ Déterminer la position du point J sur $[AB]$ pour que f soit la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.

Exercice 10 ..

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1/ Soit $h : P :\to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \bar{z} + 4i$.

a- Montrer que f est une isométrie.

b- Déterminer l'ensemble des points invariants de h.

c- En déduire la nature de h.

2/ Soit $f : P :\to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \bar{z}$

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

3/ Posons $g = f \circ R.$ Déterminer et caractériser g.

Exercice 11 ..

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Soit $f : P :\to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tq $z' = -i\,\bar{z} + 1 - i$.

Soit S la symétrie orthogonal d'axe la droite $(O;\vec{u})$.

1/ Prouver que f est une isométrie.

2/ Soit $R = f \circ S$

a- Prouver que R est une isométrie.

b- Donner l'écriture complexe de R.

c- Prouver que R est une rotation.

3/**a**- Placer I le centre de R et tracer la droite D passant par I et parallèle à la droite $\Delta : y = x$.

b- Prouver que f $= S_D$.

Exercice 12

ABC est un triangle équilatéral. Soit f l'isométrie qui n'a pas de point fixe et qui transforme A en B et B en C.

1/a) Prouver que f n'est pas une translation.

b) Déduire la nature de f.

2/ Posons $g = f \circ f$, D le point tel que ABDC est un parallélogramme et E le point tel que ABCE est un parallélogramme.

a) Déteminer g(A) et g(B).

b) Prouver que g n'a pas de point fixe.

c) Déduire les natures possibles de g.

3/ Posons h $= t_{\overrightarrow{BA}} \circ f$.

a) Montrer que h est une isométrie qui fixe A et différente de l'identité du plan.

b) Montrer que h ne peut pas être une rotation de centre A

c) Caractériser donc l'application h.

Exercice 13

Soit dans le plan P un carré direct $ABCD$ de centre I.

Soient les applications définies de P dans P par :

$$f = R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad h = r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AD)}.$$

1/ Caractériser l'application f.

2/a) Déterminer la droite Δ telle que $r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(BD)} \circ S_{\Delta}$.

b) Caractériser alors h.

3/ Soit l'application φ définie de P dans P par : $\varphi = S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer l'image de A par φ.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

Exercice 14

ABCD est un losange direct de centre O.

1/ Déterminer la nature de $f = S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$.

2/ Soit $g = S_{(AB)} \circ f$. Montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale d'axe une droite Δ.

3/ La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe (AB) en I.

a) Caractériser la droite Δ' tel que $f = S_{\Delta'} \circ S_{(OI)}$.

b) Déterminer alors la nature de g.