L. B. Monastir	**Série n : 25**	4 ^{ème} Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n :
Chapitre : Isométrie du plan + …		

Exercice 1 Vrai - Faux

1/ Soient ABC est un triangle équilatéral et f est une isométrie telle que f$(A) = B$ et f$(B) = C$.

a) f est une symétrie orthogonale ☐

b) Si f n'a pas de point fixe alors f est une symétrie glissante ☐

c) Si f n'est pas une symétrie glissante alors f est une rotation ☐

2/ Soit Δ une droite et $\vec{u}$ un vecteur de direction orthogonale à celle de Δ. On a f=$t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est une rotation. ☐

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct ABCD tel que AB=2AD.
Soient I, Jet Kles points définis par : I=A*B, J=D* C et K=$S_{(DC)}(I)$.
On pose : f=$S_{(IC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(IJ)}$ et g=$t_{\overrightarrow{IK}} \circ S_{(IC)}$.

1) Caractériser l'application $S_{(BC)} \circ S_{(IJ)}$ puis déduire que f est une rotation que l'on caractérisera.
2) Caractériser l'isométrie g$\circ S_{(AJ)}$ puis déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
3) Soit K'=$S_C\ (B)$=. Déterminer g$\circ$f$^{-1}(K)$ et g$\circ$f$^{-1}(K')$ puis déduire la nature de g$\circ$f^{-1}.

Exercice 3

Dans le plan oriente dans le sens direct, on considère un carré direct OABC de centre Ω
On note I, J et K les milieux respectifs de [OA], [OC] et [AB]

1) Soit f=$S_{(OB)} \circ S_{(\Omega I)}$. Caractériser f
2) Soit g une isométrie sans points fixes qui transforme O en C et I en J
   a) Déterminer g(A)
   b) Montrer que g est une symétrie glissante
   c) Soit D=g(K). Montrer que O est le milieu de [ID]
   d) Vérifier que g=$t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(AC)}$.
   e) En déduire les éléments caractéristiques de g
3) Soit $\varphi = g^{-1} \circ f$.
   a) Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(I)$ puis caractériser φ.
   b) Trouver alors l'ensemble (S) des points M du plan tels que f(M)=g(M)

Exercice 4

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct ABD de centre O tel que : AB=2 AD . On pose I=A*B et J=C*D.
Soit f une isométrie sans point fixe et qui envoie A en C et I en J.

1)a) Montrer que f est une symétrie glissante
   b) Montrer que f$(B) = D$
2) Soit E=f(C)
   a) Montrer que: $\widehat{CDE} = \frac{\pi}{2}$.
   b) En déduire que D=A*E.
3) Soit A' le symétrique A de par rapport à B. On pose : g=$t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(BC)}$.
   a) Déterminer g(B); g(C) et g(A).

b) En déduire que f=g

c) A l'aide d'une décomposition adéquate de $t_{\overrightarrow{BA}}$ en deux symétries orthogonales, déterminer les éléments caractéristiques de f.

4) Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABE.

Exercice 5

Soit ABCD un rectangle tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$. et AB=2AD. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [DC] et soit K=S_J(I).

1) On pose f=$S_{(IC)}t_{\overrightarrow{AB}}S_{(IJ)}$.

a/ Identifier l'application $S_{(BC)} \circ S_{(IJ)}$.

b/ En déduire que f est une rotation que l'on caractérisera.

2) On pose g=f$\circ S_{(IJ)}$

a/ Déterminer g(A) , g(D) et g(I)

b/ Démontrer que s'il existe un point M invariant par g, alors les droites (DI) , (IJ) et (DC) sont concourantes .

c/ Montrer alors que g est une symétrie glissante

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (A, $\overrightarrow{AI}$,$\overrightarrow{AD}$).

Soit l'application h : P → P ; M(z) → M'(z') tel que : z' $= i\,\bar{z} + 1 + i$.

a/ Montrer que h est une isométrie.

b/ Déterminer les affixes des points C ; J et K

c/ Déterminer h(A) ; h(D) et h(I) . En déduire que h=g

d/ Déterminer alors l'axe Δ de g et son vecteur $\overrightarrow{u}$.

Exercice 6

ABC est un triangle équilatéral. Soit f l'isométrie qui n'a pas de point fixe et qui transforme A en B et B en C.

1/**a**) Prouver que f n'est pas une translation.

b) Déduire la nature de f.

2/ Posons $g = f \circ f$, D le point tel que ABDC est un parallélogramme et E le point tel que ABCE est un parallélogramme.

a) Déteminer g(A) et g(B).

b) Prouver que g n'a pas de point fixe.

c) Déduire les natures possibles de g.

3/ Posons h $= t_{\overrightarrow{BA}} \circ f$.

a) Montrer que h est une isométrie qui fixe A et différente de l'identité du plan.

b) Montrer que h ne peut pas être une rotation de centre A

c) Caractériser donc l'application h.

Exercice 7

Soit dans le plan P un carré direct $ABCD$ de centre I.

Soient les applications définies de P dans P par :

$$f = R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad h = r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AD)}.$$

1/ Caractériser l'application f.

2/**a**) Déterminer la droite Δ telle que $r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(BD)} \circ S_{\Delta}$.

b) Caractériser alors h.

3/ Soit l'application φ définie de P dans P par : $\varphi = S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer l'image de A par φ.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.