Exercice 1 Vrai - Faux

1/ Soient ABC est un triangle équilatéral et f est une isométrie telle que f$(A) = B$ et f$(B) = C$.

a) f est une symétrie orthogonale ☐

b) Si f n'a pas de point fixe alors f est une symétrie glissante ☐

c) Si f n'est pas une symétrie glissante alors f est une rotation ☐

2/ Soit Δ une droite et $\vec{u}$ un vecteur de direction orthogonale à celle de Δ. On a f$=t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est une rotation. ☐

3/ Soient Δ, Δ' et Δ'' telles que $\Delta // \Delta'$ et $\Delta \perp \Delta''$. On a

$S_{\Delta} \circ S_{\Delta'} \circ S_{\Delta''} = S_{\Delta''} \circ S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$ ☐

Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle en A et non équilatéral. Désignons par I le mileu du segment $[BC]$.

Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant ABC.

1/ Montrer que $f(A) \neq B$ (on admet aussi que $f(A) \neq C$)

2/ Prouver que f fixe I.

3/ Déterminer les natures possibles de f.

Exercice 3

ABC est un triangle équilatéral. Soit f une ismétrie qui envoie A en B et B en C

1/ Montrer que si f n'a pas de point fixe alors f est une symétrie glissante.

2/ Dans cette question on suppose que f n'est pas une symétrie glissante.

a- Montrer que f ne peut pas être une symétrie orthogonale.

b- Déduire la nature de f.

Exercice 4

ABCD est un losange direct de centre O.

1/ Déterminer la nature de $f = S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$.

2/ Soit $g = S_{(AB)} \circ f$. Montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale d'axe une droite Δ.

3/ La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe (AB) en I.

a) Caractériser la droite Δ' tel que $f = S_{\Delta'} \circ S_{(OI)}$.

b) Déterminer alors la nature de g.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $f : P \to P;\ M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 1 \end{cases}$

1/ Déterminer les coordonnées de O'=$f(O)$ et de A'=$f(A)$ avec $A(0,1)$.

2/ Montrer que f est une isométrie.

3/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

4/ Prouver que f est une symétrie glissante.

Exercice 6

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On donne les points B$(2+2i)$; $D(2+i)$ et $C(3i)$

1/**a**- Montrer qu'il existe une seule rotation R telle que $R(O)=C$ et $R(B)=D$.

b- Préciser l'angle et le centre I de R.

2/ Soit $f : P :\to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = -iz+2i$.

a- Prouver que f est une isométrie qui possède un seul point fixe

b- Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

3/ Posons $g = f \circ R$. Déterminer et caractériser g.

4/ Soit $h : P :\to P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \overline{z} + 4i$.

a- Montrer que f est une isométrie.

b- Déterminer l'ensemble des points invariants de h.

c- En déduire la nature de h.

Exercice 7

Etant donné deux point distincts A et B. Désignons par I le milieux du segment $[AB]$. Déterminer toutes les isométries f telle que $f([AB])=[AB]$.

Exercice 8 (**act 4 page 44**)

Soit ABCD un carré direct. On désigne par S la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de $[BC]$ et par T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1/**a**- Déterminer les images par $S \circ T$ des points A, B et D.

b- Identifier $S \circ T$.

2/**a**- Déterminer les images par $T \circ S$ des points C, D et A.

b- Identifier $T \circ S$.

3/ En déduire la nature de S$\circ T \circ T \circ S$.

Exercice 9 (**ex 9 page 51**)

ABC est un triangle équilatéral direct. On désigne par I le milieu de $[AC]$ et par Δ la droite passant par B et parallèle à (AC). Soit J un point de $[BA]$ distinct de B. La parallèle à (AC) passant par J et parallèle à (AC) coupe $[BC]$ en un point K.

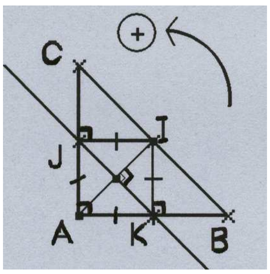
1/ Caractériser $S_{(AC)} \circ S_\Delta$ et $S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$.

2/ Identifier f = $S_{(AC)} \circ S_\Delta \circ S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$.

3/ Déterminer la position du point J sur $[AB]$ pour que f soit la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.

Exercice 10

Soit ABC est un triangle isocèle rectangle en A.
$I = B * C;\ O = A * I,\ J=A*C$ et $K=A*B$.
Soit Δ la parallèle à (AC) passant par O.
Soient $f=S_{(BC)} \circ R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$ et $g=S_{(BC)} \circ R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$



1/ Déterminer f.

2/ Montrer que $g = t_{\overrightarrow{AI}} \circ S_\Delta$.

3/ Déterminer la droite Δ' tel que $t_{\overrightarrow{JI}} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$

4/ Prouver <u>enfin</u> que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

Exercice 11 Vrai - Faux

1/ La fonction $f : x \mapsto (5-2x)\sqrt{3-x}$ est dérivable à gauche en 3 $\square$

2/ La courbe de la fonction $g : x \mapsto -x^{2010} + 2009x - 2008$ n'a pas de point d'inflexion. $\square$

3/ Soit $h : x \mapsto (x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\sin(\pi x)$.

a- l' équation $\mathrm{h}(x) = 0$ admet au moins trois solutions dans IR $\square$

b- La courbe de h admet au moins deux tangentes horizontales $\square$.

Exercice 12 QCM

1/ $\forall x \neq 0;\ \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]' =$

$P_1 : -\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad P_2 : \frac{1}{x^2}\sin(x)$ $\qquad P_3 : \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

2/ Soit f la fonction définie sur $[1,4]$ par $f(x) = \sqrt{x-1}\,(\sqrt{x}-2)$ alors la courbe de f admet

a) Aucune tangente horizontale.

b) Au moins une tangente horizontale.

c) une demi tangente horizontale au point d'abscisse 1.

Exercice 13 D'après un devoir

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par C_f sa courbe représentative de dans un RON.

1/**a**- Dresser le tableau de variation de f.

b- Etudier la position relative de C_f par rapport à la tangente T à la courbe à C_f au point $A(0,2)$.

2/**a**- Montrer que l'équation $f(x) = 3x$ admet dans $[-1, +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0, 1[$.

b- Construire T et C_f.

3/ Soit la suite (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 = \frac{\alpha}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}f(u_n)$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ 0 \prec u_n \prec 1$.

b- Démontrer que $\forall x \in [0,1]$ on a $|f'(x)| \leqslant 2$,
en déduire que $\forall n \in IN;\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

c- Démontrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 14

Soit $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x};\ \forall x \succ 0$.

1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/ Montrer que $\forall x \in [1, 2];\ f(x) \in [1,2]$.

3/ Trouver la solution α de l'équation $f(x) = x$.

4/**a**- Vérifier que $\forall t \in [1, 2];\ |f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$.

b- Montrer que $\forall x \in [1, 2];\ |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

Exercice 15

Soit $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x+1}$; $\forall x \in [1;+\infty[$.

Considérons $S_n = \sum_{k=1}^{n} f'(k)$ pour n de IN^*.

1/ Soit $x \in [1;+\infty[$. Justifier que pour tout $t \in]x; x+1[$, $f'(x+1) \leq f'(t) \leq f'(x)$

2/ En déduire que $\forall k \in IN^*;\ f'(k+1) \leq f(k+1) - f(k) \leq f'(k)$

3/ Prouver donc que $\forall n \in IN^*; f(n) - f(1) + f'(n) \leq S_n \leq f(n) - f(1) + f'(1)$

4/ Calculer enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 16

Soit la fonction f définie sur $[0,\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$

1/**a**- Vérifier que pour tout $x \succ 0;\ f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}$

b- Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3/a- Vérifier que $\forall x \succ 0;\ f'(x) \succ 0$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Tracer l'allure de C_f la courbe de f.

4/ Soit g :$[0; \frac{\pi}{2}[\to IR;\ x \mapsto g(x) = f\left[\dfrac{1}{\cos x}\right]$

a- Justifier la dérivabilité de g sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

b- Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x)$.

c- Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 17

1/ Montrer que $\forall (x,y) \in IR^2$; $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

2/ Calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left| \dfrac{\sin(x+1) - \sin(x)}{x} \right|$

Exercice 18 *D'après un devoir*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in]-\infty;\ -1[\\ -x^3+3x+3 & \text{si } x \in [-1;+\infty[\end{cases}$

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f.

2/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et interpréter graphiquement le résultat

3/**a**- Montrer que f est dérivable sur $IR \backslash \{-1\}$ et déterminer f'

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Montrer que $I(0;\ 3)$ est un point d'inflexion de C_f.

d- Ecrire l'équatiohn de la tangente T à C_f en I et étudier sa position par rapport à C_f sur $]\ -1,+\infty[$.

4/ On pose pour $x \succ 0,\ h(x) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

a- Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$.

b- Montrer que h est dérivable sur IR_+^* et déterminer h'.