L. B. Monastir	Série n : 25	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n : 4

Chapitres : Suites réelles + Dérivabilité + N complexes +…

Exercice 1 D'après un devoir

1/ On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in IN;\ u_{n+1} = \frac{3n+1}{3n+4}\, u_n$$

a- Montrer que (u_n) est décroissante sur IN.

b- Prouver que $\forall n \in IN;\ u_n = \dfrac{1}{3n+1}$.

Exercice 1

1/a- $\forall n \in IN;\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{3n+1}{3n+4}\, u_n - u_n = u_n\left[\dfrac{3n+1}{3n+4} - 1\right] = u_n\, \dfrac{-3}{3n+4}$.

Montrons d'abord que $u_n > 0;\ \forall n \in IN$

∗ Pour n=0

$u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$

¤ Soit p $\in IN$. Supposons que $u_p > 0$; montrons que $u_{n+1} > 0$. En effet

$u_{p+1} = \dfrac{3p+1}{3p+4}\, u_p > 0$ car $\dfrac{3n+1}{3n+4} > 0$ et $u_p > 0$

Ainsi : ∗ et ¤ $\Rightarrow \forall n \in IN;\ u_n > 0$

$\Rightarrow \forall n \in IN; u_{n+1} - u_n = u_n\, \dfrac{-3}{3n+4} < 0$

$\Rightarrow \forall n \in IN; u_{n+1} < u_n$

$\Rightarrow (u_n)$ est décroissante sur IN.

b- . Pour n=0

$u_0 = 1 = \dfrac{1}{3\times 0+1}$ donc la proposition est vraie pour n=0.

▸ Soit p$\in IN$. Supposons que $u_p = \dfrac{1}{3p+1}$; montrons que $u_{p+1} = \dfrac{1}{3(p+1)+1}$.

En effet : $u_{p+1} = \dfrac{3p+1}{3p+4} u_p = \dfrac{3p+1}{3p+4} \times \dfrac{1}{3p+1} = \dfrac{1}{3(p+1)+1}$.

Conclusion : . et ▸ $\Rightarrow \forall n \in IN;\ u_n = \dfrac{1}{3n+1}$.

2/a- $\forall n \in IN;\ S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} > 0$

Donc (S_n) est croissante sur IN.

b- $\forall n \in IN;\ S_{2n} - S_n = \sum_{k=0}^{2n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$

Or $\forall k \in \{n+1;\ n+2;\ n+3;\ \ldots;\ 2n\};\ u_k \geqslant u_{2n}$ (car (u_n) est décroissante)

Donc $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} = n\, u_{2n}$.

Par suite $\forall n \in IN;\ S_{2n} - S_n \geqslant n\, u_{2n}$.

c- Supposons par l'absurde que (S_n) est majorée

Comme de plus (S_n) est croissante sur IN alors (S_n) converge vers

un réel L donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = L$

Or on a $\forall n \in IN;\ S_{2n} - S_n \geqslant n\, u_{2n} = \dfrac{n}{6n+1}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n} \times 1}{\cancel{n}\left(6 + \frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{6}$

alors $0 \geqslant \frac{1}{6}$ ce qui est absurde

Par suite notre supposition est fausse et on a (S_n) n'est pas majorée.

d- (S_n) est croissante sur IN et non majorée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

2/ On considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a- Prouver que (S_n) est croissante.

b- Justifier que $\forall\ n \in IN;\ S_{2n} - S_n \geq n\, u_{2n}$.

c- Déduire que (S_n) n'est pas majorée.

d- Déterminer alors la limite de (S_n).

Exercice 2 — *D'après un devoir*

On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in IN;\ u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$

1/ Montrer que pour tout $n \in IN^*;\ u_n \geq 1$

2/**a**- Montrer que pour tout n de IN; $u_{n+1} - 2$ et $u_n - 2$ sont de signes contraires.

b- En déduire par récurrence que pour tout p de IN; $u_{2p} \leq 2 \leq u_{2p+1}$.

c- En déduire que si u est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

3/**a**- Montrer que pour tout n de IN^*; $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|u_n - 2|$.

b- En déduire que pour tout n de IN^*; $|u_n - 2| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/ Soient les suites définies sur IN^* par $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k}$; $b_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k+1}$ et

$S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a- Montrer que pour $k \in IN$, $2-\frac{3}{9^k} \leq u_{2k} \leq 2$ et $2 \leq u_{2k+1} \leq 2 + \frac{1}{9^k}$.

b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

c- Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $\begin{cases} S_{2n} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{u_{2n+1}}{2n} \\ S_{2n+1} = \frac{n(a_n + b_n)}{2n+1} \end{cases}$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 3 — *D'après un devoir* .

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = \sqrt{x^2+4} - x \quad si\ x \in]-\infty, 0] \quad et \quad f(x) = x^3 - 4x + 2 + x\cos(\frac{\pi}{x}) \quad si\ x \in]0; +\infty[$

1/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + 2x]$

2/**a**- Montrer que $\forall x \succ 0;\ x^3 - 5x + 2 \leqslant f(x) \leqslant x^3 - 3x + 2$

b- Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c- Montrer aussi que f est continue en 0.

3/ Prouver qu'il existe un réel a dans $[0; 1]$ tel que $f(a) = f(a+1)$.

Exercice 4 — *D'après un devoir*

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par C_f sa courbe représentative de dans un RON.

1/**a**- Dresser le tableau de variation de *f*.

b- Etudier la position relative de C_f par rapport à la tangente T à la courbe à C_f au point $A(0,2)$.

2/**a**- Montrer que l'équation $f(x) = 3x$ admet dans $[-1,\ +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0,\ 1[$.

b- Construire T et C_f.

3/ Soit la suite (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 = \dfrac{\alpha}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}f(u_n)$.

a- Montrer que $\forall n \in IN;\ 0 \prec u_n \prec 1$.

b- Démontrer que $\forall x \in [0,1]$ on a $|f'(x)| \leqslant 2$,

en déduire que $\forall n \in IN;\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$

c- Démontrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5 .

Soit $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x+1}$; $\forall x \in [1;+\infty[$.

Considérons $S_n = \sum_{k=1}^{n} f'(k)$ pour n de IN^*.

1/ Soit $x \in [1;+\infty[$. Justifier que pour tout $t \in]x;x+1[$, $f'(x+1) \le f'(t) \le f'(x)$

2/ En déduire que $\forall k \in IN^*;\ f'(k+1) \le f(k+1) - f(k) \le f'(k)$

3/ Prouver donc que $\forall n \in IN^*; f(n) - f(1) + f'(n) \le S_n \le f(n) - f(1) + f'(1)$

4/ Calculer enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 6 *D'après un devoir*

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on donne la courbe C_f représentative d'une fonction définie, continue et dérivable sur $]-2;+\infty[$ et les asymptotes à d'équation $x = -2$ et $y = x - 1$.

1)a) Dresser le tableau des variations de f.

b) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x + 3]$

2)a) Calculer $\lim\limits_{x\to-2^+} f \circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f \circ f(x)$.

b) Montrer que la fonction $f \circ f$ est strictement décroissante sur $]-2;-1]$.

c) Déterminer $f \circ f(]-2;-1])$

3) La courbe C_f rencontre l'axe des abscisses, aux points d'abscisses α et β avec $-2 \prec \beta \prec -1$ et $0 \prec \alpha \prec 1$.

a) Montrer que l'équation :$f(x) = \beta$, n'admet aucune solution dans $]-2;+\infty[$.

b) Construire et placer sur l'axe des abscisses, les solutions de l'équation $(f \circ f)(x) = 0$ sur $]-2;+\infty[$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$

1/**a**- Vérifier que pour tout $x \succ 0$; $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1}$

b- Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3/a- Vérifier que $\forall x \succ 0$; $f'(x) \succ 0$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Tracer l'allure de C_f la courbe de f.

4/ Soit g :$[0; \frac{\pi}{2}[\to IR$; $x \mapsto g(x) = f\left[\frac{1}{\cos x}\right]$

a- Justifier la dérivabilité de g sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

b- Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x)$.

c- Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 8 *D'après un devoir*

Exercice 9 *D'après un devoir*

A. On considère, dans $\mathbb{C}$, le polynôme suivant : $P(z) = 2z^3 - (1 + 5i)z^2 - (5 - i)z + 2i$

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2 - (1 + 3i)z - 2 = 0$
2) Montrer que l'équation P(z)=0 admet, dans, une solution imaginaire que l'on précisera
3) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation P(z)=0

B. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $\mathcal{C}$ d'affixe $e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0; 2\pi]$.
On considère l'application f qui tout point M de $\mathcal{C}$, associe f(M)=MA×MB
   a) Montrer, pour tout $\alpha \in IR$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2i\sin(\alpha)e^{i\alpha}$
   b) Montrer l'égalité suivante :$f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha} \right|$
   c) En déduire l'égalité suivante : $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$
3) Montrer qu'il existe deux points M de $\mathcal{C}$, dont on donnera les affixes, pour lesquels f(M) est minimal. Donner cette valeur minimale.

Exercice 3 (7 Points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + iz$. Soit I le point d'affixe $-\frac{i}{2}$.

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2) a) Déterminer l'affixe du point $J = f(I)$.

b) Montrer que pour tout $M \in P\setminus\{I\}$, on a $(\vec{u},\overrightarrow{JM'}) \equiv 2(\vec{u},\overrightarrow{IM})\ [2\pi]$.

c) En déduire l'ensemble Γ des points M pour lesquels $M' \in [J,\vec{U})$.

3) On pose $z = x + iy$, x et $y \in \mathbb{R}$ et $z' = x' + iy'$, x' et $y' \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b) Tracer dans le plan P la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 + \frac{1}{4}$ et la droite $\Delta : y = x$.

c) Donner à l'aide de $\mathscr{P}$ et Δ une construction géométrique du point M' à partir d'un point M de la droite $(I,\vec{u})$.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 1 + e^{i2\theta} = 0$ où $\theta \in]0,\pi[$.

b) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-i + ie^{i\theta}$, $-i - ie^{i\theta}$ et $-2i$. Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un rectangle. Déterminer la valeur de θ pour laquelle $OACB$ soit un carré.