L. B. Monastir	**Série n : 26**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n : 7
Chapitres : Isométries +…		

EXERCICE 1

ABCD est un carré direct de centre O. Soit f une isométrie transformant A en C et B en D.

1/ Prouver que f ne peut pas avoir une droite fixe point par point.

2/ Supposons que f n'a pas de point fixe. Prouver que f n'est pas une translation.

3/ Supposons que f possède un seul point fixe. Prouver que f ne peut être que la rotation de centre O et d'angle π.

EXERCICE 2 d'après un devoir

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de sens direct; A', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$ et D = $S_{(AC)}(B)$.

1/ On se propose de déterminer les isométries f qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

a- Vérifier que $f(O) = O$.

b- En déduire toutes les isométries f qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

2/ Montrer que ABCD est un losange.

3/ Caractériser chacune des isométries :

a) $t = S_{(CB)} \circ S_{(AD)}$ **b**) $r = S_{(AD)} \circ S_{(CA)}$ **c**) $r' = t \circ r$.

4/ Soit f= $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(CA)}$.

a- Déterminer $f(A)$ et f$(B;)$ en déduire $(f \circ f)(A)$.

b- Montrer alors que f n'est pas une symétrie orthogonale.

c- Démpntrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

EXERCICE 3

Soit dans le plan P un carré direct $ABCD$ de centre I.

Soient les applications définies de P dans P par :

$f = R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ et $h = r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AD)}$.

1/ Caractériser l'application f.

2/**a**) Déterminer la droite Δ telle que $r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(BD)} \circ S_{\Delta}$.

b) Caractériser alors h.

3/ Soit l'application φ définie de P dans P par : $\varphi = S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer l'image de A par φ.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

EXERCICE 4

ABC est un triangle équilatéral. Soit f l'isométrie qui n'a pas de point fixe et qui transforme A en B et B en C.

1/**a**) Prouver que f n'est pas une translation.

b) Déduire la nature de f.

2/ Posons $g = f \circ f$, D le point tel que ABDC est un parallélogramme et E le point tel que ABCE est un parallélogramme.

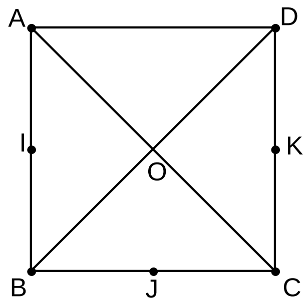
a) Déteminer g(A) et g(B).
b) Prouver que g n'a pas de point fixe.
c) Déduire les natures possibles de g.

3/ Posons h $= t_{\overrightarrow{BA}} \circ f$.
a) Montrer que h est une isométrie qui fixe A et différente de l'identité du plan.
b) Montrer que h ne peut pas être une rotation de centre A
c) Caractériser donc l'application h.

EXERCICE 5

Dans la figure ci-contre:

- $ABCD$ est un carret direct de centre O
- $I = A * B;\ J = B * C$ et $K = C * D$



1/**a**- Montrer qu'il existe une seulle rotation f telle que $f(C) = J$ et $f(J) = O.$ Déterminer l'angle de f.

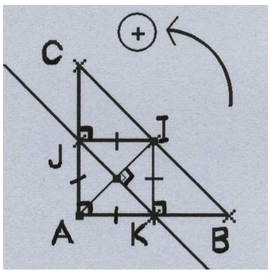
b- Déterminer $f \circ f$ en déduire que f est une rotation de centre $\Omega = O * C$.

2/**a**- Préciser $f(O)$ en déduire $f(I)$ (on remarque que $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{OI}$).
b- Quelle est la nature du triangle ΩID ?

3/ On pose $g = t_{\overrightarrow{CJ}} \circ f,\ h = S_{(BD)} \circ g$ et $\varphi = h \circ S_{(AB)}$.
a- Préciser $g(O)$ puis caractériser g en déduire l'image du carré $ABCD$ par g.
b- Préciser $h(O)$ et $h(J)$ puis caractériser h et φ.

Exercice 6

Soit ABC est un triangle isocèle rectangle en A.
$I = B * C;\ O = A * I,\ J = A * C$ et $K = A * B$.
Soit Δ la parallèle à (AC) passant par O.
Soient $f = S_{(BC)} \circ R_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)}$ et $g = S_{(BC)} \circ R_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)}$



1/ Déterminer f.

2/ Montrer que $g = t_{\overrightarrow{AI}} \circ S_{\Delta}$.
3/ Déterminer la droite Δ' tel que $t_{\overrightarrow{JI}} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$
4/ Prouver enfin que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

EXERCICE 7

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1/Soit $f : P :\rightarrow P; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = -iz + 2i$.
a- Prouver que f est une isometrie qui possède un seul point fixe
b- Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

2/ Soit $h = f \circ S$ avec S la symétrie orthogonale d'axe $(O;\vec{u})$
a- Montrer que f est une isométrie.
b- Soit $M(z)$ d'image $M'(z')$ par h. Exprimer z' en fonction de z.
c- En déduire la nature de h.

3/ Posons $g = S \circ h.$ Montrer que g est une translation que l'on caractérisera.