L.B. Monastir	Série n : 6	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaier		Séance n : 2
Thèmes : Nombres complexes + limites et continuités		

Exercice 1 *Vrai - Faux*

1/ Si $M(-1-7e^{i\theta})$ avec $\theta \in IR$ alors M appartient au cercle de centre $A(-1)$ et de rayon 7. ☐

2/ Si $ABCD$ est un carré direct alors $z_C - z_A = i(z_D - z_B)$ ☐

Exercice 2 *QCM*

Choisir la bonne réponse

1/(**bac 2009 Sc**. **exp**.) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $-1,\ 1+2i,\ 3$ et $(-3i)$. Alors on a :

a) Les vesteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux

b) Le quadrilatère $ABCD$ est un parallèlogramme.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2/(**bac 2009 Sc**. **info**.) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+3i$ et $z_B = 3+i$.

l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z| = \sqrt{10}$ est

a) la droite (AB) **b**) la médiatrice de $[AB]$

c) un cercle passant par A et B.

3/ x est un réel. $e^{-ix} - e^{ix} =$

a) $2\cos x$ **b**) $-2i\sin x$ **c**) $2i\sin x$.

4/ $Soit\ \theta \in]\pi, 2\pi[$, la forme exponentielle de $z = \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ est

a) $-2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$ **b**) $2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ **c**) $2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Exercice 3 **bac**

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation E.

2/ Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, On considère les points A et B d'affixes respectives $1+ia$ et $1-ia$. On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels.

a- Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.

b- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a| = 1$

3/ On suppose $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

a- Vérifier que $\forall x \in IR;\ 1+e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1-e^{ix} = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$

b- En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes $1+ia$ et $1-ia$.

c- Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

Exercice 4   Bac

Pour $\theta \in]0,\pi[$ on considère l'équation

$(E_\theta) : z^2 - (1 + 2\cos\theta)z + 1 + e^{i\theta} = 0$

1/**a**- Vérifier que $z' = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ).

b- Déterminer alors l'autre solution z'' de (E_θ).

2/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points $A(1)$, $M'(z')$ et $M''(z'')$.

a- Exprimer en fonction de θ le nombre complexe $\dfrac{z''-1}{z'}$

b- Déterminer θ pour que $\overrightarrow{AM''}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{OM'}$.

3/ Montrer que pour tout $\theta \in]0,\pi[$ le point $M''(z'')$ varie sur un cercle que l'on caractérisera.

Exercice 5   **DC1** (**Raouf Thabet**)

Soit m un nombre complexe non nul.

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2(im+1)z + 1 + 2im - 2m^2 = 0$.

2/ On note $z_1 = 2m$, $z_2 = (1+i)m + 1$ et $z_3 = (-1+i)m + 1$

a- Déterminer m pour que $z_2 = 0$. Déterminer m pour que $z_3 = 0$(On donnera m sous forme algébrique)

b- Montrer que $\left(|z_3| = |z_2| \right)$ équivaut à $\left(\right.$ m est imaginaire pur $\left.\right)$

3/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points M_1, M_2 et M_3 de P d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a- Montrer que $\left(\dfrac{z_3}{z_1}\right.$ est imaginaire pur $\left.\right)$ équivaut à $\left(|z_1 - 1| = 1 \right)$

b- Montrer que lorsque $OM_1M_2M_3$ est un quadrilatère alors c'est un parallélogramme.

c- En déduire l'ensemble dans lequel se trouve les points M_1 pour que $OM_1M_2M_3$ soit un rectangle.

4/ On prend dans cette question $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\alpha}$ avec α un réel dans $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Ecrire z_1 et z_3 sous forme exponentielle.

Exercice 6

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(i)$, C(1) et B(-1). A tout point $M(z) \neq A$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$.

1/ Montrer que $|z'| = 1$. Déduire un ensemble contenant les points M'.

2/**a**- Etablir que $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.

b- Interpréter géométriquement le résultat précédent.

3/**a**- Etablir que $\dfrac{z'-1}{z-i}$ est un réel

b- Interpréter géométriquement le résultat précédent.

4/ Etant donné un point M du plan différent des points A, B et C.

Construire le point M' associé à M.

Exercice 7

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout $\theta \in]0,\dfrac{\pi}{2}]$ on considère l'équation

$(E_\theta)\ :\ z^3 - 3z^2 + (3 - e^{4i\theta})z + e^{4i\theta} - 1 = 0$

1/a- Vérifier que 1 est solution (E_θ).

1 **b**- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) On désignera par z'_θ et z''_θ les

1 solutions de (E_θ) tels que $\mathrm{Im}(z'_\theta) > \mathrm{Im}(z''_\theta)$ quand $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

2/ Pour tout $\theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}]$, on pose les points $M(1 + e^{2i\theta})$ et $M'(1 - e^{2i\theta})$

a- Déterminer le point $I = M * M'$.

b- Soit $\Gamma = \{M(1 + e^{2i\theta})$ avec $\theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}]\}$. Montrer que Γ est un arc orienté dont on caractérisera.

c- En déduire l'ensemble $\Gamma' = \{M'(1 - e^{2i\theta})$ avec $\theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}]\}$.

3/a- Mettre $1 + e^{2i\theta}$ et $1 - e^{2i\theta}$ sous forme exponentielle.

b- Déterminer alors θ pour que $OM = OM'$.

Exercice 8 *bac Tn 2000 session de controle*

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$(E)\ :\ z^3 + 2(1 - i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1 + m^2) = 0$

où m est un paramètre réel .

1)**a**) Montrer que l'équation (E) admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera .

b) Calculer en fonction de m les deux autres racines.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A,B,M' et M" d'affixes respectives $2i$, $-2-2i$, $-1 - im$ et $-1 + im$.

a) Montrer que $AM'BM''$ est un parallélogramme.

b) Déterminer m pour que $AM'BM''$ soit un rectangle.

Exercice 9 *Vrai - Faux*

1/ Si une fonction f est strictement ↘ sur $]-\infty, a[$ $(a \in IR)$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. ☐

2/ Si la somme de deux fonctions admet une limite en a(*fini* ou infini) alors chacune des deux fonctions admet une limite en a. ☐

3/ On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\cos^2 x - 1)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$. ☐

Exercice 10 *QCM*

1/ Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x + 5}$. La courbe de f admet au voisinage de $+\infty$

a) une asymptote verticale

b) une asymptote oblique

c) une branche infinie de direction l'un des axes du repère.

2/ Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et telle que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $[a, b]$. On a:

a) f change nécéssairement de signe sur $[a, b]$.

b) Il est possible qu'elle garde le même signe sur $[a, b]$.

3/ $\lim\limits_{x \to 0} \left[\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right) + (x-1)^3 + \dfrac{1}{x^2} \right] =$

a) -1 **b**) 0 **c**) $+\infty$

Exercice 11

Soit $f : IR \to \ IR \ ; x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2x-3 & si \ x \leq 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & si \ x > 1 \end{cases}$

1/**a**) Montrer que $\forall x \in \,]1,+\infty[$ on a : $\frac{-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x-1}$.

b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}; \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-x)$ puis interpréter géométriquement le résultat trouvé.

3/ Prouver que f est continue sur IR.

Exercice 12

Soit la fonction $f : IR \to IR; x \mapsto f(x) = x^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right), \ \forall x \neq 0 \ et \ f(0) = 0$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Noter.bien : On pourra poser $X = \frac{2\pi}{x}$).

2/**a**- Prouver que $\forall x \in IR^*; 0 \leq f(x) \leq x^2.$ Calculer donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b- La fonction f est-elle continue en 0?

3/**a**- Encadrer $\frac{f(x)}{x}$ pour $x \in IR_+^*$, déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\frac{f(x)-0}{x-0} \right]$.

b- Encadrer $\frac{f(x)}{x}$ pour $x \in IR_-^*$, déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} \left[\frac{f(x)-0}{x-0} \right]$.

c- f est-elle dérivable en 0? Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

Exercice 13

Soit $f : IR \to IR, x \mapsto \sqrt{x^2+4x+7}$ et désignons par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

1/a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 2$

b- Déduire que C_f admet une asymptote oblique Δ que l'on précisera.

2/**a**- Prouver que $D : x = -2$ est un axe de symétrie de C_f.

b- Déterminer alors le comportement de C_f au voisinage de $-\infty$.

3/**a**- Dresser le tableau de variation de f sur $[-2; +\infty[$.

b- Construire C_f.

Exercice 14

1/**a**- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ avec $f : IR \to IR; x \mapsto \frac{2x}{\pi} - \sin x$

b- Montrer que f est impaire. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2/**a**) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ possède une seule solution β dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Dresser alors le tableau de variation de f en fonction de β sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Conclure que $\forall \ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; \frac{2x}{\pi} \leq \sin x$.

3/ Montrer que $\forall$ x$\in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; \sin x \leq x$.

4/ Calculer enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin\frac{1}{x^2}$.