L. B. Monastir	**Série n : 6**	4 ème Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n : 2

Chapitre : Nombres Complexes + Continuité et limites + …

Exercice 1 *Vrai - Faux*

1/ Si $\overline{z} = \frac{4}{z}$ alors $|z| = 2$ ☐

2/ Si $M(1+e^{2i\theta})$ avec $\theta \in IR$ alors M appartient au cercle de centre $I(1)$ et de rayon 1. ☐

3/ Si $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ alors $\arg(2+z) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ ☐

Exercice 2

On utilisant le tableau de variations si dessous d'une fonction f ; répondre au questions suivantes

1- Déterminer le domaine de définition de f

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

2- Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{1}{f(x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)+3}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{f(x)+3}$

3- Déterminer les images des intervalles suivantes par f

$]-\infty,-1]$; $]-1,0[$; $]-\infty,0[$; $]0,+\infty[$

EXERCICE 3

La figure 2 si contre désigne la courbe représentative d'une fonction f
Ainsi que ces asymptotes
On utilisant la figure déterminer :

1- le domaine de définition de f

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0} f\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0} f\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

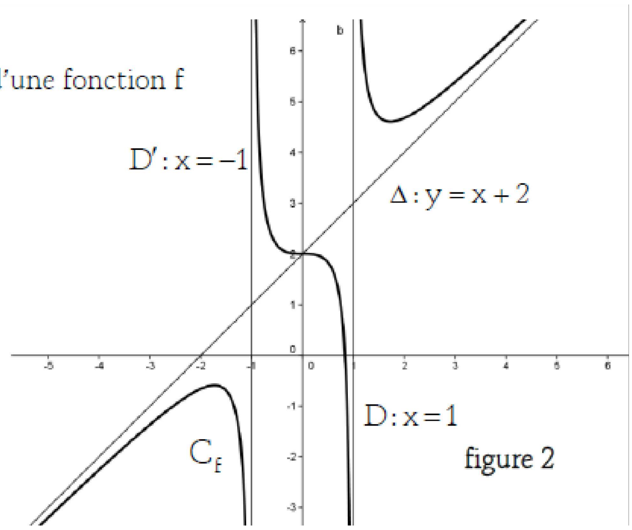

figure 2

Exercice 4 *d'après un devoir*

Soit $\theta \in]0;\ \pi[$ on pose $u = e^{2i\theta} - 1$

1/ Ecrire u sous forme exponentielle.

2/**a**- Ecrire 1+i sous forme exponentielle.

b- En déduire la forme exponentielle de z vérifiant $(1+i)z + 1 = e^{2i\theta}$.

3/ On donne $v = \cos 2\theta - 1 - i\sin 2\theta$

Vérifier que $v = \overline{u}$ puis préciser le module et un argument de v.

Exercice 5 *d'après un devoir*

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixe respectives $z_A = 4i$, $z_B = 1+i$ et $z_C = -1+3i$.

1/**a**- Donner la forme exponentielle de z_A et z_B.

b- En déduire que $z_A^8 = z_B^{32}$.

2/**a**- Montrer que ABC est un triangle rectangle en C.

b- Déterminer l'affixe du point D pour que ACBD est un rectangle.

3/ Soit $\theta \in]0;\ \pi[$ et M le point d'affixe $z_M = 1 - e^{i\theta}$

a- Montrer que lorsque θ varie sur $]0;\ \pi[$ le point M appartient à un cercle qu'on précisera.

b- Donner l'écriture exponentielle de z_M.

c- Déterminer O pour que O appartient à la médiatrice de $[BM]$.

Exercice 6 bac

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ :\ z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$.

2/ Soit θ un réel. On considère l'équation

$$(E_\theta)\ :\ z^2 + (1 - 2e^{i\theta})z - 2e^{i\theta} = 0$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ). On désignera par z_1 la solution indépendante de θ et par z_2 l'autre solution.

3/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et M d'affixes respectives z_1 et z_2.

Soit I le milieu de $[AM]$. On désigne par z_I l'affixe de I.

a- Vérifier que pour tout réel θ, $z_I + \frac{1}{2} = e^{i\theta}$.

b- Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$.

c- Déterminer les valeurs de θ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ pour lesquelles les points O,A et I sont alignés.

Exercice 7 bac

Pour $\theta \in]0, \pi[$ on considère l'équation

$$(E_\theta)\ :\ z^2 - (1 + 2\cos\theta)z + 1 + e^{i\theta} = 0$$

1/**a**- Vérifier que $z' = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ).

b- Déterminer alors l'autre solution z'' de (E_θ).

2/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points $A(1)$, $M'(z')$ et $M''(z'')$.

a- Exprimer en fonction de θ le nombre complexe $\dfrac{z''-1}{z'}$

b- Déterminer θ pour que $\overrightarrow{AM''}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{OM'}$.

3/ Montrer que pour tout $\theta \in]0, \pi[$ le point $M''(z'')$ varie sur un cercle que l'on caractérisera.

Exercice 8

1/**a**- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_1)\ :\ z^7 = 1$.

b- Exprimer les solutions en fonction de $a = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

c- Calculer alors la somme des solutions de (E_1).

2/**a**- Vérifier que $1+i$ est une solution de l'équation $(E)\ :(z-2i)^7 = 8+8i$

b- Résoudre alors l'équation (E) (on donnera les solutions en fonction de a)

c- Calculer alors la somme des solutions de (E).

Exercice 9 *d'après un devoir*

1/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} - x$.

2/ Soit f la fonction défnie sur IR_+^* par $f(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\sin(x)$.

a- Montrer que pour tout $x \in IR_+^*$ on a : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$

b- Montrer que pour tout $x \in IR_+^*$ on a : $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$.

c- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 10

Soit $f : IR \to\ IR\ ; x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2+3} + 2x - 3 & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$

1/**a**) Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[$ on a : $\dfrac{-1}{x-1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x-1}$.

b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}; \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-x)$

3/ Prouver que f est continue en 1.

Exercice 11

Soit la fonction f : $IR \mapsto IR;\ x \mapsto \begin{cases} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$

1/**a**- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

b- Prouver que f est une fonction paire.

c- En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

d- Interpréter géométriquement les résultats de **1/a- et 1/b-**.

2/**a**- Montrer que pour tout $x \neq 0;\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 2x^2$.

b- f est-elle continue en 0?

3/a- Montrer que $\forall x \neq 0;\ \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant 2|x|$.

b- Prouver que f est dérivable en 0 et intérpréter le résultat géométriquement.

Exercice 12

Soit la fonction f: x $\mapsto x^4 - 6x^2 + x; \forall x \in [0;4]$

1/a- Dreser le tableau de variation de f'

b- Déterminer le nombre de solution de l'équation f'$(x) = 0$

c- Donner un encadrement d'amplitude 0.5 de chaque solution

d- Donner le tableau de signe de f'(x)

2/a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Donner le nombre de solution de l'équation f$(x) = 0$.

Exercice 13

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction **continue**

1- Montrer que f a un point fixe (i.e . il existe $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=c$)

2- Montrer qu'il existe c dans $[0,1]$ tel que $f(c)=\sqrt{c}$

3- On suppose que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Montrer qu'il existe c dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c+\frac{1}{2})-f(c)=\frac{1}{2}$

Exercice 14

1- Soit $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ une fonction **continue** vérifiant $f(0)=f(2)$

Montrer qu'il existe c dans $[0,1]$ tel que $f(c)=f(c+1)$

2- Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction **continue** vérifiant $f(0)=f(1)$

Montrer qu'il existe c dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c+\frac{1}{2})=f(c)$